

.....DC@H97B=7C'8='A=@5BC
8]dUfh]a Ybhc' =b[Y[bYf]U'7]j]Y'Y'5a V]YbHUY'

appunti di
SIMILITUDINE e MODELLI

a cura di: prof. Silvio Franzetti
prof. Alberto Guadagnini
ing. Francesco Ballio

INDICE

1.	INTRODUZIONE	1
2.	TEOREMA II	3
2.1	Enunciato e dimostrazione	3
2.2	Applicazione	4
2.3	Osservazioni e commenti	5
2.4	Gruppi II significativi in Idraulica	10
2.5	Ulteriori esempi: moto nei tubi scabri	13
2.6	Teorema II nei modelli matematici	15
3.	MODELLI E SIMILITUDINE	17
3.1	Similitudine	17
3.2	Similitudine e teorema II	18
4.	MODELLI IDRAULICI	20
4.1	Correnti in pressione	21
4.2	Correnti a pelo libero /1	27
4.3	Correnti a pelo libero /2: trasporto solido	31
!	RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	5

1. INTRODUZIONE

Si consideri il moto permanente di un fluido all'interno di un tubo circolare, liscio e di lunghezza indefinita. Si vuole determinare sperimentalmente la legge che regola la caduta di pressione per unità di lunghezza dovuta agli sforzi tangenziali (problema attualmente non risolvibile rigorosamente per via analitica e/o numerica).

Il primo passo di ogni sperimentazione consiste nel definire i parametri che hanno effetto sulla caduta di pressione per unità di lunghezza, $\Delta p/L$. Ragionevolmente si può ritenere che sia:

$$\Delta p/L = f(D, V, \rho, \mu) \quad (1.1)$$

dove D è il diametro del tubo, V la velocità media, ρ e μ rispettivamente la densità e la viscosità del fluido. La forma della funzione $f()$ è l'incognita del problema.

Per ottenere un risultato di validità generale è necessario effettuare serie di prove sperimentali in cui si mantengono fissi i valori di tutti i parametri tranne uno, che viene fatto variare nell'intervallo di interesse, mentre contemporaneamente si misura Δp . Tali prove producono risultati simili a quelli mostrati in figura 1.1, in cui viene evidenziata la dipendenza di Δp in funzione di ogni singola variabile per 10 punti all'interno dell'intervallo di interesse. Per definire quantitativamente la relazione funzionale (1.1) con tale passo di discretizzazione è ovviamente necessario ripetere le prove per ogni combinazione dei parametri; nel caso in esame sono pertanto necessarie 10^4 prove sperimentali, risultanti in un considerevole numero di grafici, o, in alternativa, in una complessa tabella a quattro entrate, e lunghe procedure di interpolazione grafica o numerica quando si voglia valutare la (1.1) per valori generici di (D, V, ρ, μ) ; difficilmente sarà possibile trovare un'approssimante analitica che si adatti all'insieme dei valori trovati. Si deve inoltre considerare che, se è piuttosto semplice variare la velocità V nel corso delle prove, più onerosa risulta la sperimentazione al variare del diametro D , mentre è estremamente arduo variare la densità del fluido a pari viscosità e viceversa.

Nel corso dei successivi paragrafi si mostra come lo studio del problema ora posto può essere condotto in modo molto più semplice e razionale, riducendo significativamente il numero di esperimenti necessari alla definizione della relazione funzionale (1.1), mediante il teorema II (par. 2). Nel paragrafo 3 si discute come sia possibile condurre gli esperimenti su sistemi *simili* a quello in esame, ma di dimensioni differenti (modelli), al fine di facilitare la sperimentazione.

I procedimenti descritti hanno validità generale, e sono applicabili in ogni campo della fisica; nel paragrafo 4 si analizzano le principali problematiche della modellazione in campo idraulico; nel paragrafo 5 si discute un'importante estensione delle metodologie presentate nei paragrafi precedenti.

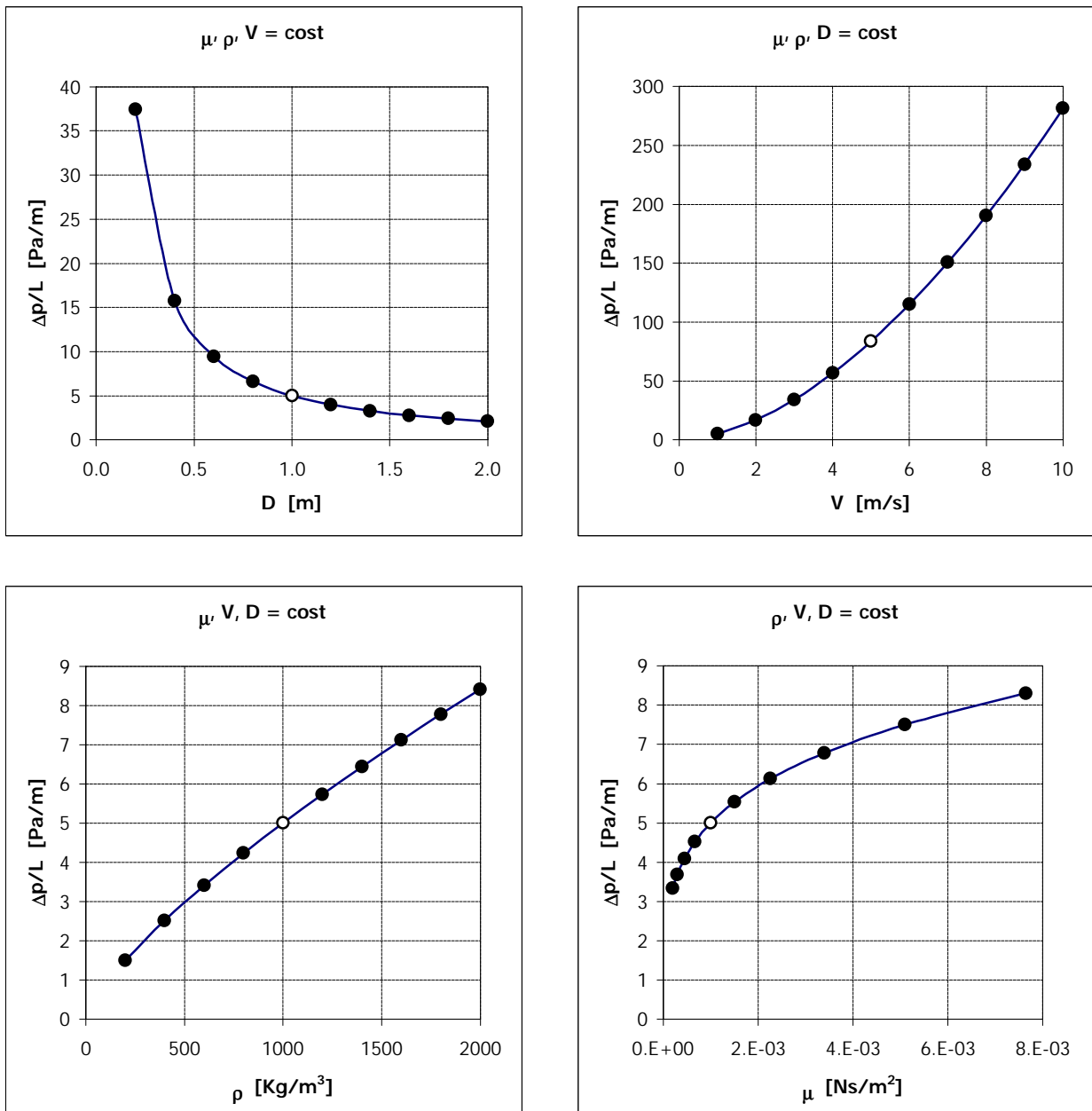


Figura 1.1 – Andamento della caduta specifica di pressione in funzione delle diverse variabili dimensionali.

Punto a simbolo vuoto: $D = 1$ m, $V = 1$ m/s, $\rho = 1000$ kg/m³, $\mu = 10^{-3}$ Ns/m².

2. TEOREMA II

2.1 ENUNCIATO E DIMOSTRAZIONE

Si consideri la relazione:

$$g_0 = f(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n) \quad (2.1)$$

fra le grandezze (g_1, \dots, g_n) che caratterizzano un dato fenomeno (variabili indipendenti, o *variabili di controllo*) e una grandezza di interesse g_0 relativa al fenomeno medesimo (variabile dipendente, o *variabile di stato*). La relazione fisica tra le grandezze considerate non dipende evidentemente dai riferimenti o dai sistemi di misura adottati, anche se la forma specifica della (2.1) può in generale variare in relazione ad essi.

Tra le (g_1, \dots, g_n) si scelgano tre¹ grandezze *fra loro dimensionalmente indipendenti*, ovverosia atte a rappresentare una terna di grandezze base per un sistema di unità di misura. Posto che tali grandezze siano (g_1, g_2, g_3) si può sempre scrivere:

$$[g_i] = [g_1]^{\alpha_i} [g_2]^{\beta_i} [g_3]^{\gamma_i} \quad i = 0, \dots, n \quad (2.2)$$

ovverosia esprimere le dimensioni di ogni grandezza come prodotto di potenze delle tre grandezze base del sistema di unità scelto. Si definiscono poi le grandezze:

$$\Pi_i = \frac{g_i}{g_1^{\alpha_i} g_2^{\beta_i} g_3^{\gamma_i}} \quad (2.3)$$

Per loro stessa definizione, le Π_i sono grandezze *adimensionali* (ovverosia a dimensione nulla), e rappresentano la *misura* delle g_i rispetto alla terna di riferimento (g_1, g_2, g_3) . Poiché, come già osservato, la dipendenza fra le grandezze considerate non dipende dal sistema di misura, se non per la *forma* della relazione funzionale che le lega, la (2.1) può essere scritta in funzione delle grandezze Π risultando:

$$\Pi_0 = f_I(1, 1, 1, \Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n) \quad (2.1')$$

essendo pari all'unità la misura delle (g_1, g_2, g_3) rispetto a se stesse. Risulta, in definitiva:

$$\Pi_0 = f_{II}(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n) \quad (2.1'')$$

La (2.1'') mostra che, *con una scelta opportuna del sistema di misura*, è possibile ridurre il numero delle variabili indipendenti di 3 unità. Questo risultato è noto sotto il nome di *Teorema P*, ovvero Teorema di Riabucinski-Buckingham. La (2.1'') può essere espressa in termini della variabile dimensionale g_0 :

$$g_0 = g_1^{\alpha_0} g_2^{\beta_0} g_3^{\gamma_0} f_{II}(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n) \quad (2.1''')$$

¹ Tre grandezze sono sufficienti per un sistema definito da sole grandezze meccaniche. Per una generalizzazione a sistemi più complessi si veda più avanti.

2.2 APPLICAZIONE

Si riconsideri il problema presentato nel paragrafo 1 alla luce del Teorema II. Quale terna base di grandezze si può scegliere (D, V, ρ); tali grandezze sono fra loro indipendenti: è immediato verificare che le loro dimensioni, valutate rispetto alla usuale terna meccanica (L, M, T = unità di lunghezza, massa, tempo):

$$[D] = L \qquad [V] = L T^{-1} \qquad [\rho] = M L^{-3}$$

sono fra loro indipendenti, e quindi (D, V, ρ) possono essere utilizzate per esprimere qualsiasi grandezza meccanica in alternativa a (L, M, T). Date le dimensioni di μ e di Δp/L rispetto a (L, M, T) si determinano immediatamente le loro dimensioni rispetto a (D, V, ρ):

$$[\mu] = M L^{-1} T^{-1} = D V \rho \qquad [\Delta p/L] = M L^{-2} T^{-2} = D^{-1} V^2 \rho$$

e quindi i gruppi adimensionali:

$$\Pi_{\mu} = \frac{\mu}{\rho V D} \qquad \Pi_{\Delta p/L} = \frac{\Delta p/L}{\rho V^2 / D}$$

La (1.1) può in definitiva essere riscritta come:

$$\Pi_{\Delta p/L} = \frac{\Delta p/L}{\rho V^2 / D} = f_1 \left(Re = \frac{\rho V D}{\mu} \right) \qquad (1.1')$$

in cui si è evidenziata la grandezza adimensionale $Re = 1/\Pi_{\mu}$ (numero di Reynolds). Essendosi ridotto il numero di variabili indipendente ad una soltanto, la soluzione del problema posto è definita da una singola curva "universale", derivante da un'unica serie di esperienze in cui la caduta di pressione nel tubo viene misurata al variare del numero di Reynolds (figura 2.1).

Ovviamente, qualora non risultasse sperimentalmente vera la (1.1') si dovrebbe dedurre essere non vera la (1.1).

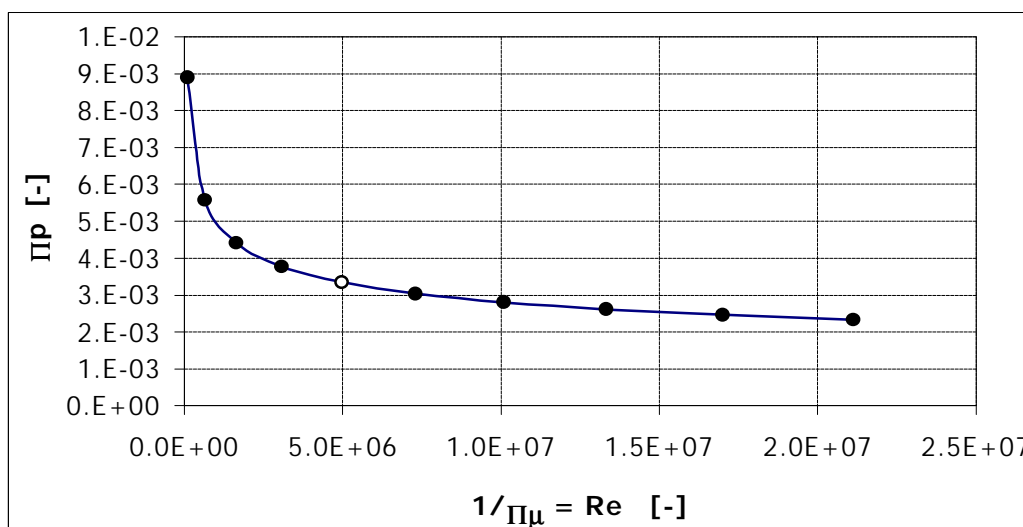


Figura 2.1 – Andamento della caduta specifica di pressione adimensionale in funzione del numero di Reynolds. Base di adimensionalizzazione: (ρ, V, D).

ρ = cost; μ = cost; D = 0.10÷2.1 m; V = 1÷10 m/s.

2.3 OSSERVAZIONI E COMMENTI

Vantaggi delle formulazioni adimensionali

La formulazione di un problema in forma adimensionale richiede di abbandonare le usuali grandezze base scelte come unità di misura, per passare ad un sistema di riferimento *intrinseco* al problema medesimo. La complicazione formale è ampiamente giustificata da alcuni fondamentali vantaggi.

- a) Si riduce il numero di variabili indipendenti che definiscono il sistema, e quindi la quantità di dati sperimentali necessari, e di conseguenza si semplifica la ricerca di formule analitiche interpolari.
- b) Entrambe la (1.1) e la (1.1') definiscono correttamente la relazione fra le perdite in un tubo e i parametri di controllo del sistema. I valori delle variabili (dimensionali) che compaiono nella funzione $f()$ della (1.1) dipendono dal sistema di unità di misura utilizzato, cosicché anche i valori della $f()$ variano con il sistema di misura; viceversa, nella $f_1()$ della (1.1') compaiono solo variabili adimensionali, i cui valori sono indipendenti dal sistema di misura: la relazione (1.1') risulta pertanto *invariante al sistema di misura* medesimo. L'adimensionalità delle variabili è *condizione necessaria* affinché una relazione abbia carattere "universale" (evidentemente non è condizione sufficiente: una formula sbagliata rimane tale anche se in forma adimensionale).
- c) I gruppi Π possono essere variati tramite ognuna delle variabili che lo compongono. Ad esempio, nella (1.1'), il numero di Reynolds (che rappresenta gli effetti della viscosità sulle perdite) può essere variato tenendo μ costante e modificando la velocità, oppure il diametro; si risolve così uno dei problemi segnalati nel paragrafo 1.1. In altre parole, risulta sperimentalmente più semplice variare le singole grandezze adimensionali rispetto a quelle dimensionali (nell'esempio di figura 2.1 il numero di Reynolds è stato variato tramite V e D , mentre ρ e μ sono stati mantenuti costanti).
- d) La formulazione adimensionale permette facilmente di confrontare sistemi "simili" ma di dimensione diversa. Tale affermazione sarà ampiamente discussa nei paragrafi 3÷5.

Scelta delle variabili

- a) Per un efficace uso del teorema Π *non* è necessario conoscere la struttura del legame funzionale $f()$ fra la variabile dipendente di interesse e le variabili indipendenti che la definiscono. E' invece essenziale determinare *a priori* il numero e la natura delle variabili indipendenti, sulla base dell'intuito, delle conoscenze di base sul fenomeno in esame e delle equazioni generali che lo governano. L'omissione di una variabile nel legame funzionale conduce ad una legge scorretta, o perlomeno di carattere non generale. E' piuttosto preferibile inserire variabili che presumibilmente non influiscono sulla variabile dipendente, salvo eliminarle in un secondo tempo una volta riconosciuta sperimentalmente la loro estraneità al fenomeno.
- b) Le variabili indipendenti (variabili di controllo) tipicamente includono tutte le caratteristiche *geometriche* del sistema, comprese le dimensioni del dominio (condizioni

al contorno) e le scabrezze superficiali, le caratteristiche *fisiche* dei materiali (solidi e fluidi), le condizioni *cinematiche* imposte ai contorni (le condizioni cinematiche interne sono invece variabili dipendenti del problema), le *forze esterne* di volume e di superficie.

- c) Nel caso interessino i valori distribuiti nello spazio e nel tempo della variabile dipendente (si cerchi cioè una funzione spazio-temporale anziché un semplice valore puntuale ed istantaneo) tra le variabili di controllo devono essere anche inserite le coordinate spazio-temporali, che entrano nel processo di adimensionalizzazione come una qualsiasi variabile indipendente:

$$g_0 = f(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n / x, y, z, t)$$

- d) Le variabili di controllo devono essere fra loro effettivamente indipendenti. Per esempio, se si inserisce il diametro di un tubo circolare fra le variabili, l'area trasversale deve essere omessa, in quanto univocamente definita dal diametro. Similmente, nel gruppo diametro, velocità media e portata, due qualunque delle variabili possono essere scelte come indipendenti, la terza essendo legata alle altre (un grado di libertà è annullato da un'equazione). Più in generale, quando all'interno del fenomeno in esame esista un legame fra alcune delle $(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n)$, una delle variabili coinvolte in tale legame deve essere omessa. Se poi esiste un legame del tipo $g_x = \phi(g_i, g_j, g_k)$ e si sa che le variabili (g_i, g_j, g_k) entrano nel problema *solo* tramite la g_x , esse possono venir sostituite da quest'ultima solamente.
- e) Quando anche un parametro sia tenuto costante nella sperimentazione (eventualmente con valore uguale a quello assunto nella realtà a cui si fa riferimento), ugualmente tale parametro deve essere inserito nella lista delle variabili di controllo. Non è infatti importante che un parametro dimensionale mantenga valore costante, ma che lo siano tutti i raggruppamenti adimensionali in cui esso compare, e questi dipendono anche da altri parametri. In particolare a priori si devono inserire le proprietà dei fluidi anche se immutate, e l'accelerazione gravitazionale.
- f) Quale grandezza base per il sistema intrinseco di unità di misura può essere scelta una qualsiasi delle variabili di controllo (eventualmente anche una coordinata spaziale e/o il tempo). In questa sede si fa sempre riferimento ad una *terna* di grandezze base, nell'ipotesi implicita che il sistema sia completamente definito da grandezze meccaniche. Sistemi più complessi possono richiedere un numero maggiore di grandezze base (ad esempio dove siano presenti effetti termici deve essere introdotta la temperatura, o una grandezza equivalente), mentre in alcuni casi due grandezze sono sufficienti (ad esempio in problemi statici con carichi permanenti non entra il tempo).²
- g) Nella scelta delle grandezze che formano la terna base, in generale è preferibile scegliere quelle che sicuramente hanno effetto sulla variabile dipendente. Scelte diverse per la terna base portano a diversi gruppi Π , e quindi a diverse strutture del legame funzionale (2.1''); non cambia invece il *numero* delle variabili adimensionali, né la correttezza

² Per approfondimenti sui concetti di dimensione e di grandezze base in un sistema di misura si può fare riferimento al testo di Barenblatt indicato in bibliografia.

dell'approccio. E' inoltre possibile combinare i gruppi adimensionali, pur di non variarne il numero e di mantenerne l'indipendenza. In una formulazione del tipo:

$$\Pi_0 = f_I(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$$

sono corrette le trasformazioni

$$\Pi_0 = f_{II}(1/\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$$

$$\Pi_0 = f_{III}(\Pi_1 \cdot \Pi_2, \Pi_2, \Pi_3)$$

mentre *non* è corretta la

$$\Pi_0 = f_{IV}(\Pi_1 \cdot \Pi_2, \Pi_1, \Pi_2).$$

Come determinare gli esponenti α, β, γ nei gruppi Π

Una volta scelta la terna di grandezze base, gli esponenti α, β, γ nella (2.3) si determinano sostituendo alle (g_1, g_2, g_3) e alla g_i le rispettive dimensioni rispetto all'usuale sistema di misura (M, L, T) ; poiché la dimensione di un gruppo Π è per definizione nulla, deve essere verificata la:

$$[g_i] = [g_1]^{\alpha_i} [g_2]^{\beta_i} [g_3]^{\gamma_i} \tag{2.4}$$

Nella (2.4) devono essere eguagliati gli esponenti di *ciascuna* delle tre grandezze base (M, L, T) , determinando così un sistema di tre equazioni nelle tre incognite $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Qualora il sistema risulti impossibile, si deve dedurre che le (g_1, g_2, g_3) *non* sono dimensionalmente indipendenti, e quindi si deve scegliere una differente terna.

Si consideri, a titolo di esempio, il caso descritto nel paragrafo 2.2:

$$[D] = L \quad [V] = L T^{-1} \quad [\rho] = M L^{-3} \quad [\mu] = M L^{-1} T^{-1} \quad [\Delta p/L] = M L^{-2} T^{-2}$$

per μ si ha quindi: $M L^{-1} T^{-1} = (L)^{\alpha} (L T^{-1})^{\beta} (M L^{-3})^{\gamma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha + \beta - 3\gamma = -1 \\ -\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow [\mu] = D V \rho$$

e per $\Delta p/L$: $M L^{-2} T^{-2} = (L)^{\alpha} (L T^{-1})^{\beta} (M L^{-3})^{\gamma}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha + \beta - 3\gamma = -2 \\ -\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow [\Delta p/L] = D^{-1} V^2 \rho$$

La procedura descritta è piuttosto tediosa. In molti casi, dopo un po' di pratica, si è in grado di individuare i gruppi Π "a occhio", in analogia con casi precedentemente risolti.

Per facilitare la determinazione dei coefficienti (α, β, γ) , si elencano di seguito le più comuni grandezze presenti nei problemi idraulici, e la loro dimensione rispetto alla terna base (M, L, T) .

<i>Proprietà dei materiali</i>	densità	$[\rho] = M L^{-3}$
	peso specifico	$[\gamma] = M L^{-2} T^{-2}$
	viscosità	$[\mu] = M L^{-1} T^{-1}$
	comprimibilità (modulo elastico)	$[\epsilon] = M L^{-1} T^{-2}$
	tensione superficiale	$[s] = M T^{-2}$
<i>Grandezze geometriche</i>	lunghezza	$[l] = L$
	area	$[A] = L^2$
	volume	$[W] = L^3$
	scabrezza	$[r] = L$
	angolo	$[\theta] = -$
<i>Grandezze cinematiche</i>	velocità	$[V] = L T^{-1}$
	accelerazione	$[a] = L T^{-2}$
	velocità angolare	$[\omega] = T^{-1}$
<i>Grandezze dinamiche</i>	forza, spinta	$[F] = M L T^{-2}$
	pressione	$[p] = M L^{-1} T^{-2}$
	perdite di carico	$[\Delta h] = L$
	energia, lavoro	$[E] = M L^2 T^{-2}$
	potenza	$[W] = M L^2 T^{-3}$

Autosimilitudine

In alcuni fenomeni può accadere che la dipendenza di una variabile di stato da un parametro di controllo svanisca quando quest'ultimo assume valori "molto grandi" ovvero "molto piccoli"; il concetto di "grande" e "piccolo" deve ovviamente essere visto in senso relativo ai valori delle altre variabili, ovvero sia in termini adimensionali. Passando ad una notazione più precisa, data una relazione fra grandezze adimensionali:

$$\Pi_0 = f(\Pi_1, \dots, \Pi_k, \dots, \Pi_n)$$

se il limite: $\lim_{\Pi_k \rightarrow 0} f(\Pi_1, \dots, \Pi_k, \dots, \Pi_n) = \exists \text{ finito, } \neq 0$ (2.5)

si dice che il fenomeno diviene *autosimile* rispetto a Π_k ; ciò significa che, per valori di Π_k al di sotto (al di sopra) di una certa soglia, il valore della funzione $f()$, e quindi di Π_0 , in pratica non dipende più da Π_k , che quindi può essere eliminato dalle variabili di controllo (limitatamente al campo definito dalla soglia). Poiché le variabili sono tutte adimensionali, il valore numerico della soglia non dipende dal sistema di unità di misura, ma solo dal

fenomeno in esame.

Quale esempio già noto si pensi alla dipendenza delle resistenze nei tubi dal numero di Reynolds (abaco di Moody): per Re sufficientemente elevato (la soglia, in questo caso, risulta funzione della scabrezza relativa) il coefficiente (adimensionale!) di perdita λ non dipende più dal numero di Reynolds.

Se il valore del limite nella (2.5) risulta nullo *non* si può considerare trascurabile la dipendenza di Π_0 da Π_k : le variazioni di Π_0 divengono bensì piccole al diminuire (crescere) di Π_k , ma contemporaneamente diviene piccolo anche Π_0 , così che le variazioni relative non tendono a svanire.

Autosimilitudine incompleta

Nel caso in cui sia:

$$\lim_{\Pi_k \rightarrow 0} f(\Pi_1, \dots, \Pi_k, \dots, \Pi_n) = 0 \tag{2.5'}$$

si è osservato non essere corretto concludere che svanisce la dipendenza del fenomeno da Π_k quando quest'ultimo diviene molto piccolo; in molti casi è però possibile determinare un esponente *a* tale che:

$$\lim_{\Pi_k \rightarrow 0} \frac{f(\Pi_1, \dots, \Pi_k, \dots, \Pi_n)}{(\Pi_k)^a} = \exists \text{ finito, } \neq 0 \tag{2.6}$$

ovverosia *f()* risulta infinitesimo di ordine *a* rispetto a Π_k . Per valori sufficientemente piccoli di quest'ultimo si può allora scrivere:

$$\Pi_0 = (\Pi_k)^a f_1(\Pi_1, \dots, \Pi_{k-1}, \Pi_{k+1}, \dots, \Pi_n) \tag{2.7}$$

avendo così esplicitato la dipendenza di Π_0 da Π_k , mentre rimane incognita la dipendenza da tutti i rimanenti parametri. Si parla in questo caso di *autosimilitudine incompleta*: il fenomeno non diviene indipendente da un parametro adimensionale, ma la dipendenza da quest'ultimo può essere esplicitata in forma monomia.

E' semplice estendere i concetti ora esposti per $\Pi_0 \rightarrow \infty$ ovvero per $\Pi_k \rightarrow \infty$.

Per approfondimenti relativi ai concetti di autosimilitudine completa ed incompleta si veda il testo di Barenblatt indicato in bibliografia.

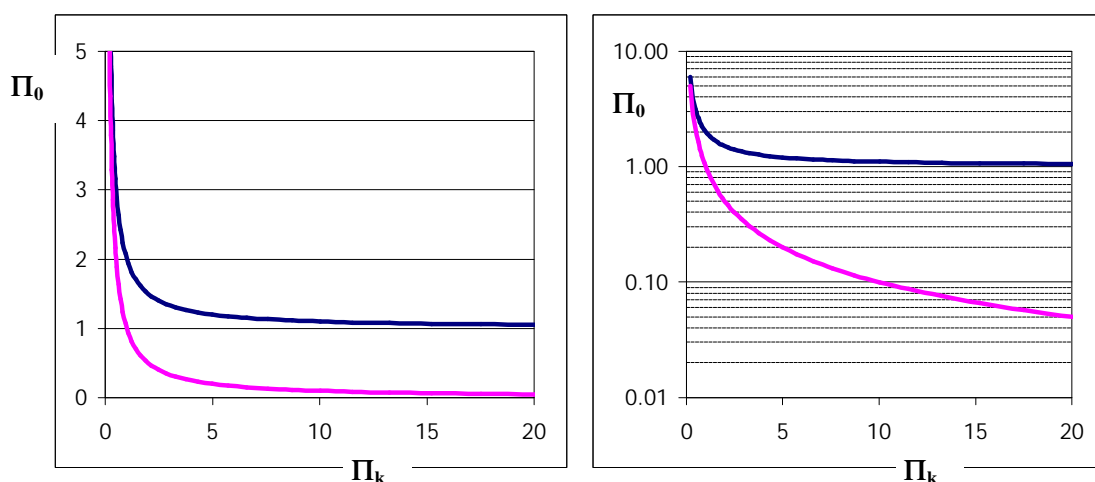


Figura 2.2 - Esempio di autosimilitudine completa (curva superiore) ed incompleta (curva inferiore). La scala bilogarithmica evidenzia come, per il caso di autosimilitudine incompleta, la dipendenza di Π_0 da Π_k non svanisce al crescere di Π_k .

2.4 GRUPPI II SIGNIFICATIVI IN IDRAULICA

In un problema di tipo idraulico, una generica variabile di stato G risulta tipicamente funzione delle grandezze meccaniche indicate nella relazione (2.8).

$$G = f(\rho, \mu, \varepsilon, s, g, L, \theta, r, V, a, p / x, y, z, t) \quad (2.8)$$

$\rho, \mu, \varepsilon, s$: rispettivamente densità, viscosità dinamica, comprimibilità e tensione superficiale del fluido o dei fluidi che interessano il problema in esame. Densità e comprimibilità possono comparire anche in relazione a solidi.

g : accelerazione di gravità. Deve essere inserita, anche se in generale è un parametro di valore fissato, ogniqualvolta siano presenti superfici di separazione fra fluidi (in particolare superfici a contatto con l'aria), o comunque sistemi di fluidi e/o solidi con densità diverse, e quindi azioni di galleggiamento.

L : tutte le lunghezze (o aree, volumi) che caratterizzano le dimensioni del dominio in cui si verifica il fenomeno in esame, ovverosia le sue condizioni al contorno geometriche.

θ : tutti gli angoli, o più in generale i coefficienti che caratterizzano la forma del dominio in cui si verifica il fenomeno in esame.

r : scabrezze superficiali.

V, a : tutti i valori di velocità e accelerazione di controllo per il sistema (ovverosia imposte su di esso). In generale si tratta delle distribuzioni spazio-temporali della velocità all'ingresso del sistema (condizioni al contorno cinematiche), ed eventualmente dei contorni fisici. Spesso le distribuzioni di velocità dei fluidi possono essere (almeno in prima approssimazione) definite da un unico valore (medio) caratteristico della velocità. In luogo di un valore di insieme di velocità si può assumere quale variabile indipendente la portata.

p : valori di pressione imposti al contorno, ovvero forze distribuite o concentrate che agiscono sul sistema (la forza peso è già contenuta in ρ e g).

x, y, z, t : coordinate spaziali e temporali, se necessarie.

Come già discusso, qualsiasi terna di grandezze fra loro dimensionalmente indipendenti può essere scelta quale base per la adimensionalizzazione della (2.8). Una tipica scelta nel caso di fenomeni fluidodinamici turbolenti è una terna del tipo (ρ, L, V) ; per fenomeni di tipo laminare si preferisce in genere la terna (μ, L, V) . Si ricorda che fra tutti i possibili valori di densità (viscosità), lunghezza, velocità presenti nella lista delle variabili indipendenti, è opportuno scegliere quelli presumibilmente più importanti per il fenomeno, ovverosia quelli che abbiano un effetto sicuramente significativo per la variabile G in esame.

Si elencano di seguito alcuni gruppi adimensionali correlati alle variabili della (2.8) sulla base della terna (ρ, L, V) , discutendone il significato fisico.

$\frac{\rho V D}{\mu}$	Re (n° di Reynolds)	$\frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscos e}}$
$\frac{V}{\sqrt{gL}}$	Fr (n° di Froude)	$\frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze peso}}$
$\frac{\rho V^2}{\varepsilon}$	Ca (n° di Cauchy)	$\frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze di c omprimibilità}}$
$\frac{V}{c}$	Ma (n° di Mach)	
$\frac{\rho V^2 L}{s}$	We (n° di Weber)	$\frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze di tensione sup erficiale}}$
$\frac{L / V}{t}$	St (n° di Strouhal)	$\frac{\text{inerzia locale}}{\text{inerzia globale (convettiva)}}$
$\frac{p}{\rho V^2}$	Eu (n° di Eulero)	$\frac{\text{forze di pressione}}{\text{forze d'inerzia}}$

- Re Di importanza generale in tutti i problemi fluidodinamici, determina la transizione laminare-turbolenta. La dipendenza dal numero di Reynolds si verifica quando nel fenomeno risultano significative sia le forze di inerzia (più o meno turbolente, ma comunque legate alla densità ρ) che le forze viscos e (legate alla viscosità μ). Numeri di Reynolds "molto piccoli" ovvero "molto grandi" (le soglie dipendono dal fenomeno) indicano che le forze viscos e prevalgono su quelle inerziali, o viceversa, fino ai limiti in cui la densità o la viscosità risultino trascurabili per il fenomeno in esame.
- Fr Interessa problemi con superfici libere. Essendo \sqrt{gh} = celerità delle perturbazioni in una corrente di profondità h , è anche $Fr = \text{velocità di una corrente} / \text{celerità delle piccole perturbazioni}$. Come noto $Fr = 1$ è la soglia che divide la natura lenta o veloce di una corrente a superficie libera.
- Ca, Ma Sono legati dalla relazione fra comprimibilità e celerità delle perturbazioni elastiche (suono): $c = \sqrt{\varepsilon / \rho}$, risultando pertanto $Ca = Ma^2$. Per $Ma < 0.3$ gli effetti di comprimibilità possono in generale essere trascurati, almeno in prima approssimazione, cosicché il comportamento di un gas è assimilabile a quello di un liquido.
- We Risulta di interesse laddove esistano interfacce fra fluidi diversi; in questo caso la tensione superficiale può a priori assumere un ruolo significativo. Si può mostrare che la radice quadrata di We è anche il rapporto fra la velocità del campo di moto e la celerità di onde capillari. In problemi pratici il numero di Weber è generalmente elevato, ad indicare che le azioni dovute alla tensione superficiale sono trascurabili rispetto alle altre forze, sicché il parametro s può essere considerato ininfluenza. Per

modelli a scala ridotta è però necessario verificare che il numero di Weber non sia troppo basso.

- St Può essere espresso in termini di una scala temporale, ovvero di una frequenza f caratteristica del fenomeno ($St = f L / V$). Rappresenta il rapporto fra le forze inerziali (le accelerazioni locali, lagrangiane) dovute alla non stazionarietà del campo di moto e quelle dovute alla variazione di velocità fra i punti del campo (accelerazioni convettive, euleriane). Da un altro punto di vista, ma con il medesimo significato, rappresenta il rapporto fra i tempi caratteristici di transito nel campo di moto e i tempi caratteristici delle variazioni (oscillazioni) non stazionarie.
- Eu Rapporto fra forze di pressione (spesso dipendenti da un differenziale Δp) e forze inerziali. Sotto la forma $\Delta p / (\frac{1}{2} \rho V^2)$ è indicato "Coefficiente di pressione". Analoghi coefficienti sono definiti per le forze; tipici esempi i coefficienti di Drag, Lift = $F / (\frac{1}{2} \rho V^2 A)$, dove A è un'area caratteristica del sistema.

2.5 ULTERIORI ESEMPI: MOTO NEI TUBI SCABRI

Per generalizzare il problema affrontato nei paragrafi 1 e 2.2 (perdite di carico distribuite per condotti circolari in pressione) al caso di tubo scabro, deve essere aggiunta alla lista dei parametri di controllo la scabrezza superficiale r caratteristica del tubo³; mantenendo (D, V, ρ) quali grandezze fondamentali si ottiene pertanto:

$$\Pi_{\Delta p/L} = \frac{\Delta p / L}{\rho V^2 / D} = f\left(\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu}, \frac{r}{D}\right) \quad (2.A)$$

Si noti che il gruppo adimensionale $\Pi_{\Delta p/L}$ risulta pari a $\lambda/2$, essendo λ l'indice di resistenza dell'abaco di Moody.

La dipendenza delle perdite dai parametri di controllo del sistema viene definita da una doppia infinità di esperimenti al variare dei due gruppi adimensionali.

Alcune specifiche osservazioni possono essere svolte distinguendo i due fondamentali regimi di moto (laminare, turbolento).

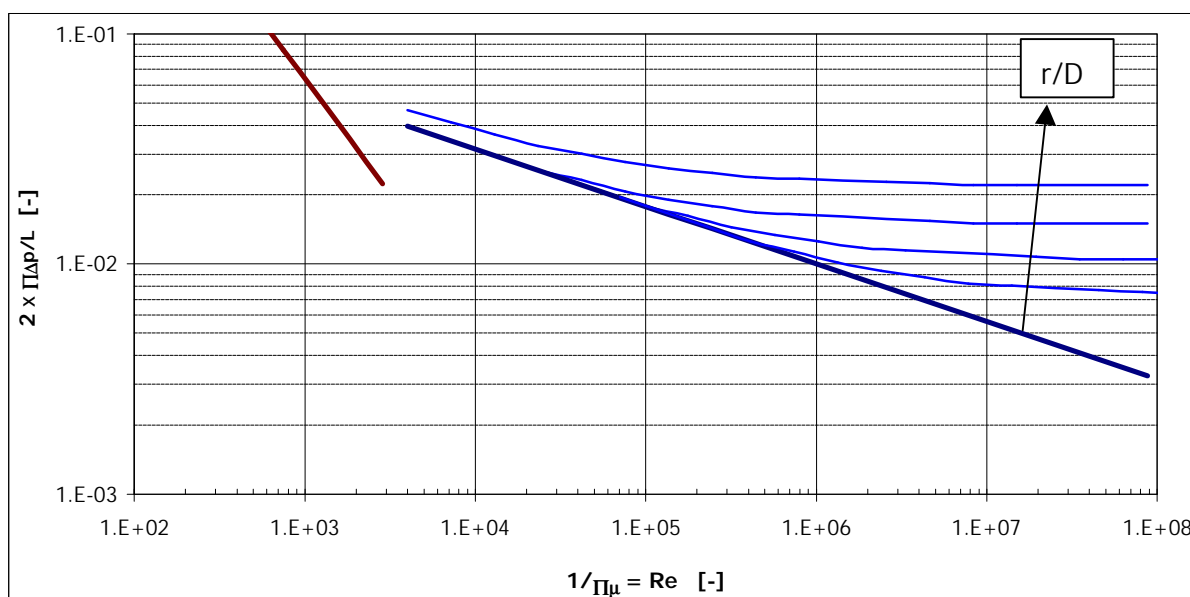


Figura 2.3 - Andamenti del coefficiente adimensionale di resistenza in funzione di Re e di r/D (abaco di Moody).

³ Nell'analisi dei tubi lisci ($r = 0$) si era eliminato dall'analisi dimensionale il parametro relativo alla scabrezza. Si ricorda che, in generale, *non è lecito* eliminare un parametro *dimensionale* di controllo anche se esso viene mantenuto costante, in quanto il gruppi *adimensionale* ad esso associato possono variare al variare degli altri parametri. Nel caso speciale di valore identicamente nullo, però, è chiaro che il valore costante del parametro dimensionale ($r \equiv 0$) implica necessariamente valore costante per ogni gruppo adimensionale ad esso associato ($\Pi_r \equiv 0$), e quindi il parametro può essere eliminato a priori dall'analisi.

Regime laminare

Nel caso di moto laminare, sia analisi concettuali a priori, sia i risultati sperimentali indicano che $\Pi_{\Delta p/L}$ (ovverosia λ) è indipendente dalla scabrezza del tubo. In particolare risulta:

$$\Pi_{\Delta p/L} = f(Re) = \frac{32}{Re} \quad (2.B)$$

dove la proporzionalità inversa fra $\Pi_{\Delta p/L}$ e Re , determinabile per via sperimentale, è confermata dalla soluzione analitica del moto (si veda il testo di Citrini e Nosedà).

Nel caso di regime laminare, il moto è governato dagli sforzi viscosi (proporzionali alla viscosità μ) più che a quelli inerziali/turbolenti (legati alla densità ρ del fluido); di conseguenza è ragionevole la scelta della terna (D, V, μ) in alternativa alla più usuale (D, V, ρ) . I gruppi adimensionali risultanti sono allora:

$$\Pi'_{\Delta p/L} = \frac{\Delta p / L}{\mu V / D^2} = f(Re) \quad (2.C)$$

(si noti che il numero di Reynolds è il rappresentante di μ rispetto alla terna (D, V, ρ) così come il rappresentante di ρ rispetto alla terna (D, V, μ)).

Rispetto alla nuova terna, la legge di resistenza per il caso laminare si riduce a:

$$\Pi'_{\Delta p/L} = \text{cost} = 32 \quad (2.D)$$

(le resistenze *non* dipendono dal numero di Reynolds, ovverosia non dipendono da ρ).

Le (2.B) e (2.D) sono peraltro fra loro riconducibili esplicitando l'espressione del numero di Reynolds a secondo membro della (2.B); nonostante la completa equivalenza delle due forme, nella (2.D) il coefficiente adimensionale delle perdite di carico non dipende da alcun parametro adimensionale di controllo, mentre nella (2.B) si evidenzia la dipendenza da Reynolds. La differenza nel numero di variabili indipendenti è causata dal fatto che nella (2.C), la scelta della densità ρ per la terna base di adimensionalizzazione ha forzato tale parametro ad apparire nella formula che esprime le perdite, nonostante esso sia del tutto ininfluenza per il caso laminare.

Sebbene non formalmente necessario, per evitare di complicare le analisi (e le formule che ne derivano), è bene scegliere i parametri base fra le grandezze che sicuramente influiscono sul fenomeno per tutto il campo di interesse.

Regime turbolento

Per regime di moto turbolento, il fenomeno è indubbiamente influenzato dalle forze di inerzia oltre che da quelle viscosi, sicché la terna base (D, V, ρ) e le conseguenti normalizzazioni sono senza dubbio significative. In generale vale la (2.A), dipendendo il coefficiente delle perdite distribuite sia da Re che da r/D .

In riferimento al campo turbolento della figura 2.3 si sottolineano due aspetti caratteristici:

- 1) Per ogni valore di r/D esiste un limite superiore di Re oltre cui svanisce la dipendenza del coefficiente di perdita dal numero di Reynolds (autosimilitudine rispetto a Re):

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \Pi_{\Delta p/L} = f(r/D) \quad (\exists \text{ finito})$$

Il campo di autosimilitudine rispetto al numero di Reynolds è usualmente indicato come "moto *assolutamente* turbolento".

2) Per ogni valore di Re esiste un limite inferiore di r/D al di sotto del quale svanisce la dipendenza del coefficiente di perdita dalla scabrezza (autosimilitudine rispetto a r):

$$\lim_{r/D \rightarrow 0} \Pi_{\Delta p/L} = f(\text{Re}) \quad (\exists \text{ finito})$$

Come peraltro è ovvio, per valori molto piccoli della scabrezza, le curve collassano sulla curva caratteristica dei tubi lisci.

2.6 TEOREMA II NEI MODELLI MATEMATICI

Il teorema II può essere utilmente applicato anche all'analisi di modelli matematici, ovverosia delle equazioni che governano un dato fenomeno. Non si vuole in questa sede approfondire l'argomento in termini generali, per cui si rimanda al già citato testo di Barenblatt; ci si limita ad un significativo esempio, analizzando le equazioni generali del moto dei fluidi (equazioni di Navier-Stokes) alla luce dell'analisi dimensionale.

Le equazioni di Navier-Stokes possono essere scritte, in forma vettoriale, come:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad}(\vec{v}) = \nu \nabla^2(\vec{v}) + \frac{1}{3} \nu \text{ grad div}(\vec{v}) - \frac{1}{\rho} \text{ grad}(p) + \vec{g} \quad (2.9)$$

dove g è l'accelerazione gravitazionale (supposta unica forza esterna). Scelta come terna base (ρ, L, V), dove L e V sono una lunghezza e una velocità caratteristiche del fenomeno (legate, per esempio, alle condizioni al contorno) si possono definire le variabili adimensionali:

$$\tilde{x} = \frac{\bar{x}}{L}$$

$$\tilde{v} = \frac{\bar{v}}{V}$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/V}$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho V^2}$$

Le equazioni del moto possono essere riscritte in forma adimensionale:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \text{ grad}(\tilde{v}) = \frac{\nu}{VL} \left(\nabla^2(\tilde{v}) + \frac{1}{3} \text{ grad div}(\tilde{v}) \right) - \text{ grad}(\tilde{p}) + \frac{L \vec{g}}{V^2} \quad (2.10)$$

La (2.10) indica che due fenomeni governati da tale equazione hanno la *medesima soluzione* in termini di variabili adimensionali se i gruppi adimensionali caratteristici dei due fenomeni:

$$\text{Re} = \frac{VL}{\nu}$$

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

assumono il medesimo valore. Due fenomeni descritti dai medesimi parametri adimensionali, e che differiscono solo per i relativi valori dimensionali, saranno definiti quali *simili* nel paragrafo 3.

Le osservazioni ora svolte non sono di aiuto nella soluzione delle equazioni del moto, ma

forniscono un criterio *a priori* per determinare i parametri che influenzano un fenomeno fluidodinamico dalla sola analisi delle equazioni generali che lo governano, anche senza conoscerne la soluzione. Considerazioni più attente portano tuttavia a riconoscere che l'eguaglianza dei due soli parametri adimensionali (Re , Fr) nelle (2.10) non è in effetti sufficiente per garantire un'unica soluzione adimensionale. A tale scopo devono essere anche identici i valori (sempre adimensionali) che definiscono le condizioni al contorno, che determinano la soluzione unitamente alle equazioni del moto⁴. Nessun problema particolare nasce invece dall'equazione di continuità, da associare alle equazioni scritte.

Nel caso di fluidi *incomprimibili* le equazioni del moto (2.9)-(2.10) possono essere semplificate. Detta z la coordinata verticale, si può scrivere:

$$\bar{g} = -g \text{ grad}(z) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \text{ grad}(p) + \bar{g} = \frac{1}{\rho} \text{ grad}(p + \gamma z) \quad (2.11)$$

Definita allora la variabile $p^* = p + \gamma z$, ed essendo $\text{div}(\bar{v}) = 0$, risulta:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \text{ grad}(\bar{v}) = \nu \nabla^2(\bar{v}) - \frac{1}{\rho} \text{ grad}(p^*) \quad (2.9')$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v} \text{ grad}(\tilde{v}) = \frac{\nu}{V L} \nabla^2(\tilde{v}) - \text{grad}(\tilde{p}^*) \quad (2.10')$$

Dalle equazioni ora scritte appare evidente che l'accelerazione di gravità non influisce sul campo di moto, ovverosia sulla distribuzione di velocità che si determina dalle (2.9')-(2.10') (si noti che nell'equazione di continuità per fluidi incomprimibili non compare la pressione). Contemporaneamente si è mostrato come il campo di pressione p può essere scomposto in una componente p^* dipendente dai soli effetti dinamici, e dalla residua componente $p - p^* = \gamma z$, coincidente con la distribuzione idrostatica, che non ha alcun effetto sul campo di moto.

Nella (2.10') è scomparsa la dipendenza dal numero di Froude: se ne dedurrebbe che i processi fluidodinamici non dipendono da tale gruppo adimensionale. Ciò risulta in effetti vero, purché la dipendenza dalla gravità non rientri nelle condizioni al contorno, e quindi in assenza di superfici a pelo libero (ad esempio nello studio delle perdite di carico nelle condotte in pressione non è necessario considerare alcuna dipendenza da Fr).

⁴ Si noti che, nel caso generale in cui si considerino fluidi a densità e viscosità non costante, si deve anche garantire l'eguaglianza adimensionale delle funzioni di stato che determinano p e μ in funzione di pressione e temperatura, nonché l'equazione che esprime la conservazione dell'energia per determinare le distribuzioni di temperatura nel fluido.

3. MODELLI E SIMILITUDINE

Un modello è una rappresentazione di un sistema fisico (prototipo) che può essere utilizzato per predire il comportamento del sistema in relazione ad alcune sue caratteristiche.

Nel campo della fisica e dell'ingegneria è comune fare uso di modelli *fisici* o *matematici* per studiare un dato fenomeno. In questa sede si vogliono considerare i modelli fisici. In generale un modello fisico ha dimensioni geometriche differenti da quelle del prototipo (tipicamente minori, ma non sempre), utilizza fluidi diversi, più in generale opera in condizioni cinematiche e dinamiche differenti, ma in qualche modo quantitativamente riconducibili a quelle del prototipo, così che le osservazioni fatte sul modello possano essere utilizzate per predire il comportamento del sistema reale di interesse.

In questo paragrafo vengono descritte le procedure che permettono di progettare un modello di un fenomeno reale che soddisfi i requisiti sopra descritti.

3.1 SIMILITUDINE

Nella usuale accezione di similitudine, due figure geometriche sono simili se, a parità di forma, le distanze fra punti omologhi nelle due figure hanno rapporto costante.

In generale il concetto di *similitudine geometrica* fra due sistemi può essere espresso dalla condizione:

$$\frac{L''}{L'} \equiv \text{cost} = \lambda_L \quad (3.1)$$

dove L' e L'' sono due qualsiasi lunghezze omologhe nei due sistemi; il rapporto fra le lunghezze (indipendente dalla coppia di lunghezze scelto) è detto *scala delle lunghezze*. Si può dimostrare che in due sistemi geometricamente simili, il rapporto fra qualunque coppia di grandezze geometriche omogenee (aree di porzioni corrispondenti, volumi, angoli) è pure costante, sia pur con scale che dipendono dalla grandezza (in particolare risulta $\lambda_{\text{angoli}} = 1$, ovvero sia gli angoli sono identici in due sistemi geometricamente simili).

Il concetto di similitudine geometrica può essere esteso ad ogni classe di grandezze. In particolare due sistemi geometricamente simili sono anche in *similitudine cinematica* se le velocità di ogni coppia di punti omologhi sono in rapporto costante:

$$\frac{V_x''}{V_x'} = \frac{V_y''}{V_y'} = \frac{V_z''}{V_z'} \equiv \text{cost} = \lambda_V \quad (3.2)$$

In tal caso si può dimostrare che sono costanti anche i rapporti fra le accelerazioni in punti omologhi dei due sistemi.

Due sistemi geometricamente e cinematicamente simili sono in *similitudine dinamica* se le forze totali in punti omologhi sono in rapporto costante:

$$\frac{F_x''}{F_x'} = \frac{F_y''}{F_y'} = \frac{F_z''}{F_z'} \equiv \text{cost} = \lambda_F \quad (3.3)$$

In presenza di accelerazioni non nulle, perché la (3.3) sia soddisfatta è necessario che anche le masse (densità) di punti omologhi siano in rapporto costante affinché siano in similitudine le forze d'inerzia.

La similitudine cinematica può anche essere definita indipendentemente da quella geometrica. Si considerino traiettorie passanti per punti omologhi. Due sistemi sono cinematicamente simili se dette traiettorie sono formate da punti omologhi, e i tempi necessari per coprire le distanze fra punti omologhi sono in rapporto costante (scala dei tempi). Si mostra facilmente che in tal caso risultano costanti i rapporti fra le componenti di velocità in punti omologhi, ma il rapporto (ovvero la scala) è in generale differente per le tre componenti. Lo stesso vale per le componenti di accelerazione. Nel caso i due sistemi siano anche geometricamente simili le scale delle tre componenti di velocità (accelerazioni) risultano fra loro uguali, e si riottiene la (3.2).

Analogamente la similitudine dinamica non richiede necessariamente le similitudini cinematica e geometrica; è sufficiente che siano costanti i rapporti fra uguali componenti di forza in punti omologhi, potendo essere fra loro diverse le scale delle tre componenti. Qualora i sistemi siano anche geometricamente e cinematicamente simili si ricade nel caso espresso dalla (3.3).

In generale, quanto si parla di similitudine di due sistemi, ci si riferisce alla similitudine di *ogni* grandezza meccanica (eventualmente termodinamica, chimica, ...). E' chiaro però che si possono considerare accezioni parziali, richiedendo la similitudine di un numero ridotto di grandezze, ovvero limitatamente ad alcuni punti soltanto del sistema.

3.2 SIMILITUDINE E TEOREMA II

Siano dati due sistemi fra loro meccanicamente confrontabili, pertanto determinati dallo stesso numero e tipo di parametri (di controllo). Scelta un'opportuna terna intrinseca si costruiscano i gruppi adimensionali dei parametri di controllo. Il legame fra similitudine e il teorema II è espresso dalla seguente affermazione:

*condizione sufficiente affinché i due sistemi siano in similitudine
è che siano uguali i valori dei gruppi P associati ai parametri di controllo.*

L'affermazione è immediatamente verificata. Sia infatti G una generica variabile di stato per i due sistemi, $(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n)$ le variabili di controllo, $(\Pi_4, \Pi_5, \dots, \Pi_n)$ i corrispondenti gruppi adimensionali rispetto alla terna base (g_1, g_2, g_3) . Indicati con (') e (") i due sistemi, risulta:

$$\Pi_{G'} = \frac{G'}{g_1^\alpha g_2^\beta g_3^\gamma} = f(\Pi_{4'}, \Pi_{5'}, \dots, \Pi_{n'}) \quad (3.4')$$

$$\Pi_{G''} = \frac{G''}{g_1^{\alpha''} g_2^{\beta''} g_3^{\gamma''}} = f(\Pi_{4''}, \Pi_{5''}, \dots, \Pi_{n''}) \quad (3.4'')$$

La funzione $f()$ è la medesima perché le leggi fisiche che governano i due sistemi sono evidentemente le stesse; se allora è (CS):

$$\Pi_{i'} = \Pi_{i''} \quad i = 4, \dots, n \quad (3.5)$$

risulta anche:

$$\Pi_{G'} = \Pi_{G''} \quad (3.6')$$

e quindi:

$$\frac{G''}{G'} = \frac{g_{1''}^\alpha g_{2''}^\beta g_{3''}^\gamma}{g_{1'}^\alpha g_{2'}^\beta g_{3'}^\gamma} = \left(\frac{g_{1''}}{g_{1'}}\right)^\alpha \left(\frac{g_{2''}}{g_{2'}}\right)^\beta \left(\frac{g_{3''}}{g_{3'}}\right)^\gamma = \lambda_1^\alpha \lambda_2^\beta \lambda_3^\gamma = \lambda_G \quad (3.6'')$$

Le (3.6) possono essere scritte per una qualunque variabile di stato dei due sistemi governata dalle variabili di controllo $(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n)$. Per la similitudine dei sistemi è pertanto sufficiente che siano uguali le $(n-3)$ variabili adimensionali; la scala di una grandezza G è univocamente determinata dalle scale delle grandezze base tramite i coefficienti (α, β, γ) che ne legano le dimensioni. Poiché tali coefficienti sono i medesimi per gruppi di grandezze omogenee, anche le scale di grandezze fra loro omogenee sono le stesse, il che garantisce per l'appunto la similitudine del sistema rispetto a tali grandezze.

Osservazioni

- a) In generale la condizione *non* è necessaria (si veda a proposito il paragrafo 5).
- b) Sia il secondo dei due sistemi il *modello* del primo (*prototipo*). La CS (Condizione Sufficiente) ora dimostrata garantisce che, tramite il teorema Π , tre variabili dimensionali possono essere arbitrariamente scelte nel modello; qualora si voglia soddisfare la CS, i valori di tutte le altre variabili di controllo del modello sono determinate dalla condizione dell'eguaglianza dei gruppi adimensionali associati. Si noti che le grandezze arbitrariamente scelte non devono necessariamente coincidere con le grandezze della terna base. In sostanza si hanno 3 gradi di libertà nel modellare un fenomeno.
- c) Qualora si utilizzi la CS offerta dal teorema Π , scelte le tre grandezze libere, e quindi determinato il valore delle corrispondenti scale, le scale di tutte le rimanenti grandezze (di stato e di controllo) sono univocamente determinate per semplice composizione dimensionale.
- d) La CS è immediatamente applicabile a similitudini parziali (limitatamente ad alcune grandezze, o ad alcuni punti): siano $(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n)$ le variabili di controllo di un sistema, da cui dipendono in generale le variabili di stato che descrivono il sistema medesimo. E' possibile che alcune particolari variabili di stato non dipendano da *tutte* le (g_1, \dots, g_n) , ma solamente da un loro sottogruppo (g_k, \dots, g_m) : per la similitudine di tali variabili di stato è allora sufficiente che coincidano i gruppi Π relativi alle (g_k, \dots, g_m) , non necessariamente di tutte le variabili che controllano l'intero sistema.

4. MODELLI IDRAULICI

Si consideri nuovamente la relazione fra una generica grandezza e i tipici gruppi di variabili indipendenti in un problema fluidodinamico (paragrafo 2.4):

$$G = f(\rho, \mu, \varepsilon, s, g, L, \theta, r, V, a, p / x, y, z, t) \tag{4.1}$$

Quando si voglia costruire un modello, data per scontata la similitudine geometrica (tra cui le scabrezze relative), e scelta una scala delle lunghezze:

$$\frac{L''}{L'} = \frac{L_{\text{modello}}}{L_{\text{prototipo}}} \equiv \lambda_L = \lambda$$

rimangono due gradi di libertà per le variabili dimensionali non geometriche.

$$(\rho, \mu, \varepsilon, s, g, V, a, p / t)$$

In generale non è evidentemente possibile variare il valore dell'accelerazione gravitazionale, che quindi satura un ulteriore grado di libertà. Risulta a questo punto chiaro che *non* si può mantenere il medesimo fluido nel prototipo e nel modello (sarebbero fissate altre 4 grandezze).

In altre parole, qualora si volesse utilizzare lo stesso fluido (e lo stesso valore per g), nascono condizioni fra loro incompatibili per garantire la costanza dei numeri adimensionali associati. A titolo di esempio si mostra tale incompatibilità per le scale della velocità:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = \text{cost} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho V' L'}{\mu} = \frac{\rho V'' L''}{\mu} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V''}{V'} = \frac{1}{\lambda} \\ \text{Ca} = \text{cost} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho V'^2}{\varepsilon} = \frac{\rho V''^2}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V''}{V'} = 1 \\ \text{We} = \text{cost} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\rho V'^2 L'}{s} = \frac{\rho V''^2 L''}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V''}{V'} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ \text{Fr} = \text{cost} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V'}{\sqrt{g L'}} = \frac{V''}{\sqrt{g L''}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V''}{V'} = \sqrt{\lambda} \end{array} \right. \tag{4.2}$$

E' chiaro che solo una delle condizioni (4.2) può essere verificata. La *perfetta similitudine* è perciò *impossibile* (a parità di fluido).

Si noti che il vincolo di mantenere invariato il fluido nasce da esigenze pratiche, non concettuali: è infatti preferibile per ovvi motivi di reperibilità lavorare con aria o con acqua; qualora si accettasse di variare il fluido, risulta in ogni caso molto difficile trovarne uno le cui caratteristiche fisiche si adattino a soddisfare i vincoli imposti dal teorema II.

In effetti, in molti fenomeni idraulici l'influenza della comprimibilità (Ca) e della tensione superficiale (We) è trascurabile (*autosimilitudine* rispetto a Ca, We). Rimane comunque l'incompatibilità delle condizioni sui numeri di Reynolds e di Froude, che sarà discussa nei paragrafi che seguono.

4.1 CORRENTI IN PRESSIONE

Tipici problemi che richiedono (o hanno richiesto) studi sperimentali di correnti in pressione sono:

- Perdite continue in condotti cilindrici (cfr. par. 2.5)
- Perdite concentrate in corrispondenza di singolarità (discontinuità, griglie, ...)
- Studi di base sul moto turbolento dei fluidi
- Azioni fluidodinamiche su corpi immersi in una corrente d'aria o acqua (edifici, sommergibili, aeromobili, autoveicoli, pallina da golf, ...)
- Moto vario in sistemi complessi di condotte (colpo d'ariete, oscillazioni di massa)

Come si è già avuto modo di osservare, la gravità influisce sul moto dei fluidi solo in presenza di superfici libere e/o di densità non costanti (effetti di galleggiamento); in tutti gli altri casi, il parametro g (ovvero il numero di numero di Froude) può essere eliminato dalla lista delle variabili di controllo. In assenza di superfici libere scompaiono anche gli effetti della tensione superficiale. Qualora si possano ritenere trascurabili gli effetti di comprimibilità, il fluido risulta caratterizzato dalle sole grandezze (ρ, μ) ; è pertanto possibile costruire un modello fissando la scala geometrica λ , e mantenendo invariato il fluido; delle relazioni (4.2) si soddisfa la:

$$Re_{\text{modello}} = Re_{\text{prototipo}} \quad (\lambda_{Re} = 1) \tag{4.3}$$

da cui seguono le scale di tutte le altre grandezze:

scala geometrica del modello	$\lambda_L = \lambda$	$(\Rightarrow \lambda_{Aree} = \lambda^2 ; \lambda_{Volumi} = \lambda^3)$
stesso fluido nel prototipo	$\lambda_\rho = 1$	
e nel modello	$\lambda_\mu = 1$	

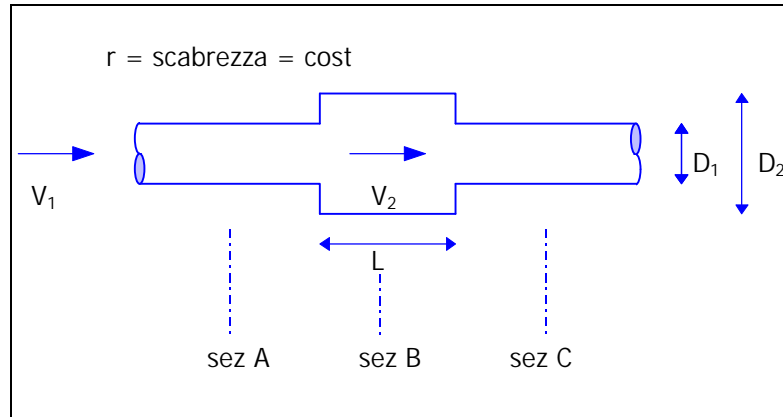


similitudine di Reynolds: $\lambda_{Re} = 1$

scabrezze	$\lambda_r = \lambda$
velocità	$\lambda_V = \lambda^{-1}$
accelerazioni	$\lambda_a = \lambda^{-3}$
portate	$\lambda_Q = \lambda$
tempi	$\lambda_t = \lambda^2$
forze	$\lambda_F = 1$
pressioni	$\lambda_p = \lambda^{-2}$
cadente (adimensionale!)	$\lambda_J = 1$
Froude ($g_m = g_p$)	$\lambda_{Fr} = \lambda^{-3/2}$
Weber ($S_m = S_p$)	$\lambda_{We} = \lambda^{-1}$
Cauchy ($\epsilon_m = \epsilon_p$)	$\lambda_{Ca} = \lambda^{-2}$

Esempio /1: perdite di carico in un diffusore circolare

Si consideri il flusso in un tubo circolare, in cui sia presente un brusco allargamento seguito da un brusco restringimento, che riporta il diametro al valore originale.



Si vuole studiare la dipendenza delle perdite di carico fra le sezioni A e C (esprese in termini di caduta di pressione) dai parametri del sistema.

Si può in generale esprimere il problema nella forma:

$$\Delta p = p_C - p_A = f_1(p_1, V_1, D_1, D_2, L, r, \rho, \mu) \tag{4.A}$$

Sono state a priori escluse dalla dipendenza funzionale l'accelerazione di gravità (si vedano le considerazioni generali precedentemente svolte), e i parametri (p_2, V_2) che rappresentano variabili *interne* al problema, ovverosia variabili di stato (non di controllo), peraltro legate alle variabili indipendenti da ovvie relazioni (equazione di continuità + bilancio energetico).

Dalla relazione (4.A) può inoltre essere esclusa anche la pressione p_1 : i livelli assoluti di pressione non influenzano infatti i fenomeni fluidodinamici, almeno fino a che non ci si approssima alla pressione di vapor saturo del fluido.

Per regime di moto turbolento si sceglie quale terna base (D_1, V_1, ρ) ottenendo:

$$\Pi_{\Delta p} = \frac{\Delta p}{\rho V_1^2 / D_1} = f_2(D_2/D_1, L/D_1, r/D_1, Re_1) \tag{4.B}$$

Il fenomeno deve essere pertanto studiato in funzione di 4 parametri adimensionali indipendenti, tra cui Re (similitudine di Reynolds).

Si consideri anche la soluzione del problema, come tipicamente è indicata nei manuali di Idraulica (cfr. Citrini e Nosedà):

$$\Delta p/\gamma = (V_1 - V_2)^2/2g + m(D_1/D_2) V_1^2/2g \tag{4.C}$$

(perdite allargamento + perdite restringimento)

Esempio /1: discussione

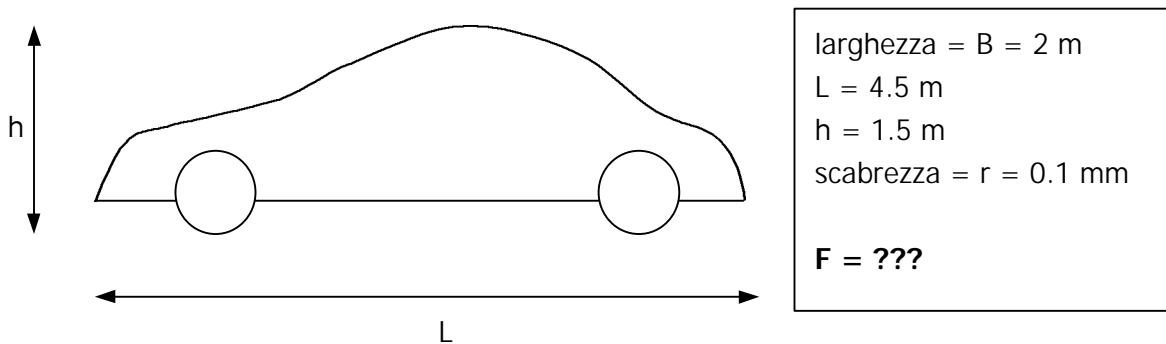
1. Le (4.B) e (4.C) sono fra loro riconducibili? Sotto quali ipotesi, ovvero in quali condizioni?
2. Nella (4.C) le perdite di carico sono legate, fra gli altri parametri, all'accelerazione

gravitazionale g . E' corretta allora l'ipotesi iniziale di indipendenza del fenomeno da tale parametro?

3. Nell'analisi sono state del tutto trascurate le influenze della tensione superficiale e della comprimibilità del fluido: tale semplificazione è sempre corretta?
4. Ci si può attendere un comportamento autosimile rispetto ad alcuni dei parametri nella (4.B)? Quali?

Esempio /2: spinta su corpo investito da una corrente

Si vuole stimare la forza di resistenza incontrata da un'auto che viaggia alla velocità di 30 m/s \cong 100 km/h. Si intende utilizzare un modello in scala $\lambda = 1/10$ da porsi in galleria del vento (modello fermo, corrente fluida in movimento).



Sarà in generale:

$$F = f_1(h, L, B, r, V, \epsilon, \rho, \mu) \tag{4.D}$$

E' stata inserita nella lista dei parametri di controllo la comprimibilità ϵ in quanto l'aria non può a priori essere considerata un fluido incompressibile. In generale si possono assumere trascurabili gli effetti della comprimibilità per numeri di Mach inferiori a 0.3. Nel caso in esame:

$$\epsilon \text{ (aria)} \cong 1.0 \div 1.7 \cdot 10^5$$

$$\rho \text{ (aria)} \cong 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$\Rightarrow Ma = \frac{V}{\sqrt{\epsilon/\rho}} \cong 0.1 < 0.3$$

sicché l'effetto della comprimibilità appare trascurabile.

I parametri geometrici (h, L, B) possono essere rappresentati da un'unica dimensione, fissata la *forma* del modello (similitudine geometrica). Si scelga l'altezza h quale lunghezza di riferimento.

Si deve inoltre notare che la forza esercitata sulla vettura non è necessariamente costante nel tempo; si dovrebbe pertanto aggiungere la coordinata temporale nella lista delle variabili. Se si vuole però considerare solo i valori medi temporali del fenomeno (se mediamente stazionario), si può eliminare la dipendenza da t .

In termini adimensionali (terna (h, V, ρ)) si ottiene:

$$\Pi_F = \frac{F}{\rho V^2 h^2} = f_2(\text{forma}, r/h, Re) \quad (4.E)$$

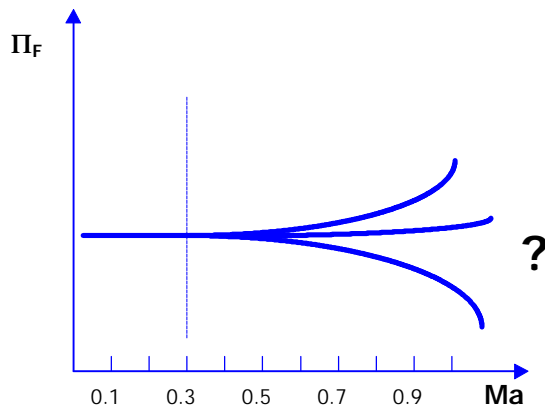
Assicurata la similitudine di forma e della scabrezza, se si mantiene per il modello il medesimo numero di Reynolds del prototipo (similitudine di Reynolds) si assicura la similitudine dei due fenomeni, così che la forza misurata sul modello è riconducibile a quanto succede nella scala reale (in similitudine di Reynolds le due forze assumono il medesimo valore). I valori caratteristici per il problema sono riassunti nella tabella seguente.

grandezza	prototipo	modello	scala
ρ	aria	aria	1
μ	aria	aria	1
B	2.0 m	20 cm	1/10
L	4.5 m	45 cm	1/10
h	1.5 m	15 cm	1/10
V	30 m/s	300 m/s	10
F	???	da misurare	1

Si deve notare l'elevato valore di velocità necessario nella galleria del vento. Al di là delle possibili difficoltà tecniche per raggiungere una velocità di 300 m/s, si considerino gli effetti sul numero di Mach ($\lambda_{Ma} = 10$):

$$Ma_{\text{modello}} = 10 Ma_{\text{prototipo}} \cong 1 > 0.3 !!!$$

In tali condizioni senza dubbio la comprimibilità dell'aria ha un effetto non trascurabile sul flusso attorno al modello, che quindi risulta *non in similitudine* con quello relativo al prototipo. Le forze misurate sul modello *non sono a priori significative* per valutare quelle sul prototipo.



Per valori del numero di Mach inferiori a 0.3 si può escludere la dipendenza del campo di moto, e quindi, in particolare, delle forze sulla vettura, da Ma.

Per $Ma > 0.3$ l'effetto del parametro sulla forza esercitata sulla vettura non è in generale trascurabile, e a priori risulta incognito.

Esempio /2: discussione

1. E' lecito non considerare, nell'analisi, le dimensioni della galleria del vento?
2. E' lecito non considerare il valore della pressione del fluido circostante la vettura (pressione atmosferica, per il prototipo)?
3. Si può superare il problema delle distorsioni dovute a Ma? Come?
4. Qualora si parta da un prototipo caratterizzato da ridotta scabrezza superficiale, può risultare impossibile ridurre in scala tale parametro. Sono in tal caso significativi i risultati ottenuti dal modello?
5. Si potrebbe utilizzare nell'esperimento un liquido al posto dell'aria? Quali conseguenze avrebbe tale scelta? Si ottengono vantaggi significativi?
6. Per assicurare la similitudine è indispensabile mantenere il medesimo valore per il numero di Reynolds nel prototipo e nel modello?

Osservazioni

1. La similitudine di Reynolds a pari fluido impone $\lambda_v = 1/\lambda$: se le dimensioni lineari sono ridotte di 10 volte ($\lambda = 1/10$) le velocità devono essere decuplicate. Tale vincolo può in pratica risultare problematico; in particolare se si usano areiformi, l'aumento della velocità determina un corrispondente aumento del numero di Mach ($\lambda_{Ma} = \lambda_v = 1/\lambda$) e l'ipotesi di incomprimibilità del fluido, valida solo per ridotti numeri di Mach, non risulta più valida (si esce dal campo di autosimilitudine rispetto al numero di Mach).
2. Leggi di scala diverse da quelle sopra elencate possono essere ottenute variando le proprietà del fluido utilizzato. Se per esempio si usa acqua nel modello al posto di aria (nel prototipo), la similitudine di Reynolds comporta ($\nu = \mu/\rho$):

$$Re_p = L_p V_p / \nu_p = L_m V_m / \nu_m = Re_m \quad \Rightarrow \quad \lambda_v = V_m / V_p = (L_p / L_m) (\nu_m / \nu_p) = \lambda^{-1} \lambda_\nu$$

Essendo $\lambda_\nu = \nu_{acqua} / \nu_{aria} \cong 1/10$ per $\lambda = 1/10$ risulta $\lambda_v \cong 1$, cosicché non è necessario aumentare la velocità nel modello. Si consideri peraltro che le velocità massime raggiungibili in acqua sono significativamente inferiori a quelle in aria.

Un'ulteriore possibilità consiste nell'usare aria in pressione, in modo da variarne la densità (a viscosità pressoché costante).

3. Per elevati valori del numero di Reynolds in molti fenomeni gli effetti della viscosità tendono ad annullarsi; in tal caso non è più necessario mantenere il vincolo $\lambda_{Re} = 1$, pur di non uscire nel modello dal campo di autosimilitudine in Reynolds. Si acquista in tal modo un grado di libertà, "spendibile" per semplificare l'apparato sperimentale o per eliminare (o perlomeno ridurre) le distorsioni eventualmente introdotte da We , Ca , Fr .
4. Qualora si stiano studiando fenomeni di *cavitazione* si deve introdurre nella lista delle variabili indipendenti la *pressione di vapor saturo* p_v del liquido. Ad esso si associa un particolare gruppo adimensionale (Eulero) $(p_r - p_v)/(\frac{1}{2}\rho V^2)$ dove p_r è un'opportuna pressione di riferimento per il sistema. Anche tale gruppo deve risultare uguale nel prototipo e nel modello.
Viceversa è necessario considerare che fenomeni cavitativi non presenti nel prototipo possono insorgere nel modello: essendo $\lambda_p = \lambda^{-2}$ le differenze di pressione (e quindi le possibili depressioni) vengono esaltate nel modello rispetto al prototipo.
5. L'incomprimibilità del fluido *non* può essere supposta qualora si studino fenomeni supersonici, ovvero problemi di colpo d'ariete. In tali casi si deve abbandonare la similitudine in Reynolds, rispettando invece i vincoli sul numero di Cauchy (Mach), sempre se gli effetti di Re sul fenomeno sono trascurabili o quantomeno limitati. Si noti che nello studio dei fenomeni di colpo d'ariete la similitudine della comprimibilità deve essere rispettata anche in relazione alla deformabilità delle superfici di contorno.
6. In prossimità di fenomeni di transizione laminare-turbolenta la similitudine in Reynolds può non essere sufficiente; a parità del numero di Reynolds il sistema può infatti trovarsi in stato laminare, ovvero turbolento (punto di discontinuità). Ci si deve allora anche assicurare che il *regime di moto* sia il medesimo.
7. Qualora nel sistema in esame siano presenti superfici libere (o effetti di galleggiamento) non si può a priori prescindere dalla dipendenza da g , e quindi dal numero di Froude.

4.2 CORRENTI A PELO LIBERO /1

Problemi tipici per modelli con correnti a superficie libera:

- Dettagli di un corso d'acqua non riducibili a 1D: sistemi complessi, fenomeni concentrati (opere idrauliche, ...).
- Propagazione di onde; fenomeni 1D, 2D, 3D.
- Propagazione di inquinanti
- Resistenze di natanti galleggianti

Nei fenomeni a superficie libera senza dubbio sono trascurabili gli effetti di comprimibilità. Sono a priori presenti gli effetti della tensione superficiale (anche se nella realtà spesso trascurabili, si vedano le successive osservazioni).

Non si può ovviamente eliminare la gravità dalla lista dei parametri di controllo; quale fluido raramente si possono utilizzare liquidi diversi dall'acqua, anche a causa delle grandi quantità spesso necessarie. In tali condizioni è a priori impossibile soddisfare l'eguaglianza di Fr, Re, We come richiesto dalla condizione sufficiente di similitudine. Poiché gli effetti della gravità sono in genere comunque presenti si sceglie di soddisfare la:

$$Fr_{modello} = Fr_{prototipo} \quad (\lambda_{Fr} = 1) \tag{4.4}$$

salvo verificare che gli effetti delle distorsioni su Re (e We) siano trascurabili (autosimilitudine), o comunque limitati. Fissata dunque la scala geometrica e mantenuto invariato il fluido, seguono le scale di tutte le altre grandezze:

scala geometrica del modello	$\lambda_L = \lambda$	$(\Rightarrow \lambda_{Aree} = \lambda^2 ; \lambda_{Volumi} = \lambda^3)$
stesso fluido nel prototipo e nel modello	$\lambda_\rho = 1$	$(\lambda_\mu = 1)$ (l'effetto di μ non viene considerato)
gravità costante	$\lambda_g = 1$	



similitudine di Froude: $\lambda_{Fr} = 1$

scabrezze	$\lambda_r = \lambda$	
velocità	$\lambda_V = \lambda^{1/2}$	
accelerazioni	$\lambda_a = 1$	$(\lambda_a = \lambda_{gravità} = 1)$
portate	$\lambda_Q = \lambda^{5/2}$	
tempi	$\lambda_t = \lambda^{1/2}$	
forze	$\lambda_F = \lambda^3$	
pressioni	$\lambda_p = \lambda$	
cadente (adimensionale!)	$\lambda_J = 1$	
Reynolds	$\lambda_{Re} = \lambda^{3/2}$	
Weber ($s_m = s_p$)	$\lambda_{We} = \lambda^2$	

Un approfondimento è opportuno in relazione alla similitudine delle scabrezze. Concettualmente la scabrezza è una dimensione lineare, e quindi deve seguire la scala delle lunghezze. Negli alvei naturali la scabrezza è determinata dalla granulometria dei materiali costituenti il fondo e le sponde, dalla presenza di vegetazione, dalle irregolarità naturali del fondo e delle sponde. In definitiva la scabrezza degli alvei naturali è determinata da un insieme di fattori difficilmente quantificabili, riassunti dai coefficienti C (coefficiente di Chézy) ovvero K_s (coefficiente di Strickler) nelle:

$$J = \frac{V^2}{C^2 R} \quad C = K_s R^{1/6} \quad (4.5)$$

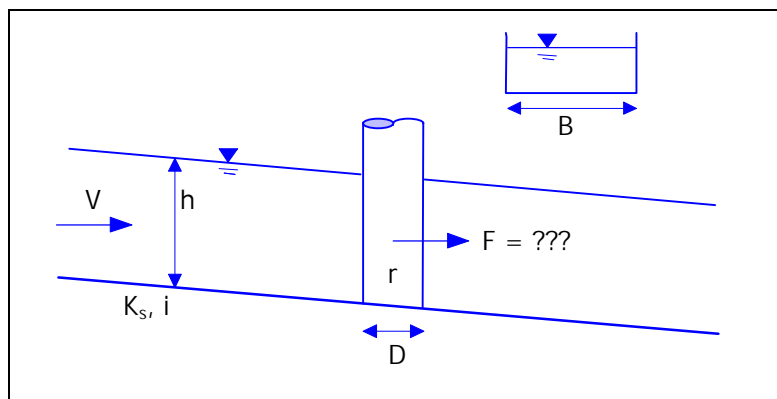
Nei modelli risulta impossibile riprodurre i fattori reali che determinano la scabrezza, e si tende invece a replicarne l'effetto di insieme in termine di C e/o di K_s . Le leggi di scala in similitudine di Froude risultano:

Chézy	$[C] = [\sqrt{g}] = L^{1/2} t^{-1}$	$\lambda_C = 1$
Strickler	$[K_s] = L^{1/3} t^{-1}$	$\lambda_{K_s} = \lambda^{-1/6}$

Esempio: forza esercitata da una corrente sulla pila di un ponte

Si vuole stimare la forza esercitata da una corrente torrentizia sulla pila di un ponte, in direzione della corrente. Il sistema è schematicamente rappresentato in figura.

Si intende utilizzare un modello in scala $\lambda = 1/100$, in canaletta idraulica.



- $U = 4.0 \text{ m/s}$
- $h = 4.3 \text{ m}$
- $B = 75 \text{ m}$
- $D = 2.5 \text{ m}$
- $r = 2 \text{ mm}$ (scabrezza pila)
- $K_s = 30$
- $i = 0.003$

Si può affrontare il problema con una relazione del tipo:

$$F = f_1(h, B, D, V, r, K_s, i, \rho, \mu, g) \quad (4.a)$$

Un'analisi più attenta dei parametri porta a concludere che la scabrezza e la pendenza dell'alveo possono essere, almeno in prima approssimazione, eliminati dalla lista dei parametri di controllo; tali grandezze infatti non appaiono influire direttamente sulla forza sulla pila una volta che siano fissate h e V^5 . La profondità h della corrente, e la velocità media

⁵ In effetti K_s ed i possono influenzare la distribuzione di velocità nella corrente, di cui V è il valor

V possono essere valutate in una sezione a monte della pila, ad una distanza sufficiente affinché la corrente non risenta del disturbo causato dalla pila medesima.

Quale scala caratteristica per le lunghezze si può indifferentemente assumere D oppure h. Scelta la terna (D, V, ρ) si ottiene:

$$\Pi_F = \frac{F}{\rho V^2 D^2} = f_2(h/D, B/D, r/D, Re, Fr) \quad (4.b)$$

Combinando opportunamente i gruppi adimensionali, come indicato nel paragrafo 2.3, i numeri indice Re, Fr possono essere espressi come:

$$Re = Re_h = \rho V h / \mu \quad \text{ovvero} \quad Re = Re_D = \rho V D / \mu$$

$$Fr = Fr_h = V / \sqrt{gh}$$

Se, come appare logico, si privilegia la similitudine di Froude nel modellare il fenomeno, si ottengono i valori caratteristici riportati in tabella.

grandezza	prototipo	modello	scala
ρ	acqua	acqua	1
μ	acqua	acqua	1
s	acqua	acqua	1
B	75 m	75 cm	1/100
D	2.5 m	2.5 cm	1/100
h	4.3 m	4.3 cm	1/100
r	2 mm	20 μm	1/100
V	4 m/s	0.4 m/s	1/10
g	9.806 m/s ²	9.806 m/s ²	1
Re _h	1.7·10 ⁷	1.7·10 ⁴	1/1000
F	???	da misurare	1/1'000'000

Dalla misura della forza esercitata sulla pila nel modello si può risalire a quella relativa al caso reale. Si noti che le forze vengono ridotte di un fattore 10⁶: facilmente si è costretti, sul modello, a misure di sollecitazioni di piccola entità (pochi grammi-forza).

Come già osservato in esempi precedenti, può risultare difficoltoso ridurre in scala esatta la scabrezza superficiale r (con possibili effetti distorsivi). Infine rimane ovviamente presente il problema degli effetti della riduzione del numero di Reynolds: il valore assunto da Re_h nel

medio, e quindi le azioni dinamiche sulla pila. Si può peraltro considerare tali effetti come trascurabili in prima approssimazione.

modello garantisce il regime turbolento della corrente in quest'ultimo, ma a priori sono da prevedere distorsioni sui valori assunti da Π_f .

Esempio: discussione

1. Sarebbe vantaggioso utilizzare quale parametro di controllo la portata anzichè la velocità?
2. Sarebbe vantaggioso utilizzare quale parametri di controllo le variabili Q (portata), K_s (scabrezza), i (pendenza)? Quanti e quali parametri si dovrebbero corrispondentemente eliminare dalla (4.a)?
3. Ci si può attendere un comportamento autosimile rispetto ad alcuni dei parametri nella (4.b)? Quali?
4. In quale misura è corretto trascurare gli effetti della tensione superficiale?
5. Si possono tenere in conto gli effetti distorsivi dovuti ad una imperfetta scalatura della scabrezza superficiale della pila?

Osservazioni

1. Nella realtà i numeri di Reynolds caratteristici delle correnti sono generalmente molto elevati, così che spesso i fenomeni reali non dipendono da Re (si noti che nella relazione di Chézy per il calcolo delle resistenze distribuite non si considera alcuna dipendenza dal numero di Reynolds, implicitamente intendendo di essere in condizioni di moto puramente turbolento). Analogamente è solitamente del tutto trascurabile l'influenza delle tensioni superficiali (We elevati). Gli effetti di Re e di We possono invece risultare significativi su scale ridotte: $\lambda_{Re} = \lambda^{3/2}$, $\lambda_{We} = \lambda^2$, e quindi entrambi i numeri indice diminuiscono più che linearmente con la scala delle lunghezze nel passare da prototipo e modello. In altre parole, l'autosimilitudine rispetto a Re e We valida nella realtà può non essere valida nel modello, i cui risultati non sono pertanto paragonabili a quelli del prototipo⁶.

2. Per problemi reali che dipendono significativamente dalla viscosità non si può prescindere dall'eguaglianza dei numeri di Reynolds. Un caso tipico sono le resistenze offerte dai natanti, in cui la gravità, le forze viscosive e le forze inerziali hanno tutte peso significativo sul fenomeno. Poiché in pratica risulta impossibile utilizzare fluidi diversi per il modello e il prototipo, sono inevitabili distorsioni sui risultati delle sperimentazioni a scala ridotta. Tecniche particolari devono essere impiegate in simili casi.

⁶ Si pensi ad esempio alla formula per l'efflusso di uno stramazzo Bazin (Citrini e Nosedà 1987, par. 11.2): il carico efficace per determinare la portata è corretto di un termine aggiuntivo pari a 1.1 mm che tiene conto degli effetti della tensione superficiale; tale correttivo è assolutamente ininfluente nella maggior parte dei casi pratici, ma può divenire significativo su modelli di piccola scala.

4.3 CORRENTI A PELO LIBERO /2: TRASPORTO SOLIDO

Un importante campo di applicazione dei modelli di correnti a superficie libera è lo studio dei processi erosivi in alvei naturali: il materiale di fondo, in generale incoerente, viene movimentato dall'acqua, specie durante gli eventi di piena, con conseguenti variazioni della morfologia dell'alveo (variazioni altimetriche, planimetriche e della forma della sezione). Più in generale l'evoluzione spazio-temporale di un corso d'acqua è funzione delle condizioni di equilibrio statico (in assenza di trasporto solido) o dinamico (bilanci fra solido in ingresso e in uscita su ogni tronco).

Nonostante i numerosi studi relativi alle leggi che regolano i fenomeni di trasporto, è assai difficile prevedere nel dettaglio l'evoluzione morfologica di un sistema, specie in presenza di campi di moto non semplici. Si ricorre allora spesso a modelli sperimentali, tipicamente per valutare gli effetti di opere idrauliche, ovvero per simulare situazioni particolari di flusso (onde di crollo, ...).

Cenni di trasporto solido

L'effetto motore di una corrente nei confronti del solido di fondo è quantificato dall'entità delle azioni tangenziali medie τ della corrente sul contorno. Si ricorda la relazione fra sforzi tangenziali e cadente J , valida per ogni tipo di corrente (in pressione o a pelo libero):

$$\tau = \gamma R J \quad (4.6)$$

dove R è il raggio idraulico.

Per bassi valori di τ non si osserva alcun moto del materiale di fondo. Si definisce *sforzo critico* ovvero soglia di *incipiente movimento* il valore limite per gli sforzi tangenziali al di sopra del quale si osserva trasporto solido (τ_c). Il legame fra τ_c e le caratteristiche della corrente e dei sedimenti è espresso dalla relazione (in forma adimensionale):

$$\phi_c = \frac{\tau_c}{g (\rho_s - \rho) d} = f \left(\text{Re}^* = \frac{\sqrt{\tau/\rho} d}{\nu}, i, \frac{h}{d} \right) \quad (4.7)$$

dove ρ_s è la densità del solido di fondo, d è una dimensione caratteristica dei granelli solidi, i è la pendenza dell'alveo, h la profondità della corrente.

Per valori piccoli della pendenza ($i < 10\%$) e gradi di sommergenza h/d non troppo ridotti ($h/d > 6$) si è verificato che ϕ_c non dipende da i e da h/d , mentre la dipendenza dal numero di Reynolds è rappresentata dal grafico sperimentale di figura 4.1 (abaco di Shields). Per valori di $\text{Re}^* > 50 \div 100$ si può assumere che ϕ_c sia indipendente dal numero di Reynolds; quale valore (medio) di riferimento per tale campo si assume in genere $\phi_c = 0.047$ oppure $\phi_c = 0.06$.

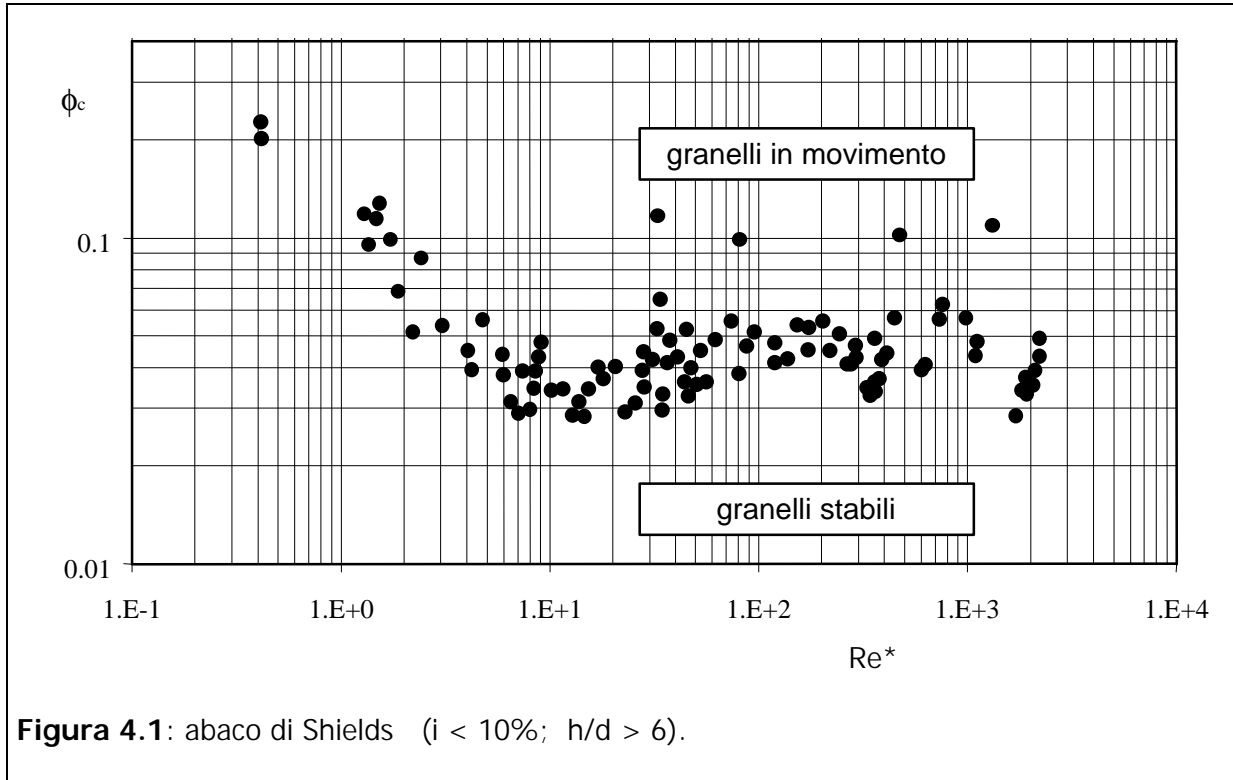


Figura 4.1: abaco di Shields ($i < 10\%$; $h/d > 6$).

Per valori dello sforzo tangenziale (ovverosia delle resistenze) superiori a τ_c si osserva un moto di fondo (*trasporto solido*) in ragione dello squilibrio fra τ e τ_c . Detta q_s la portata solida volumetrica per unità di larghezza, vuoti esclusi, si può assumere (formula di Meyer, Peter e Müller – valida in alveo rettangolare molto largo: $B \gg h$):

$$\Phi = \frac{q_s}{\sqrt{d^3 g \Delta}} = 13.3 (\phi - \phi_c)^{1.5} \quad (4.8)$$

con $\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$ e $\phi = \frac{\tau}{g (\rho_s - \rho) d} = (\text{tramite la (4.6)}) = \frac{R J}{\Delta d}$.

Trasporto solido: leggi di scala

Le formule (4.7) e (4.8), già in forma adimensionale, indicano implicitamente le scale per una corretta modellazione dei fenomeni di trasporto solido. Pur di rimanere nel campo di validità dell'abaco di Shields, l'eguaglianza dei numeri di Reynolds garantisce il medesimo valore di soglia (adimensionale) di incipiente movimento:

$$Re^*_{\text{modello}} = Re^*_{\text{prototipo}} \quad \Rightarrow \quad \phi_{c \text{ modello}} = \phi_{c \text{ prototipo}} \quad (4.9)$$

Se la (4.9) è soddisfatta, l'eguaglianza degli sforzi (adimensionali) garantisce quella del numero indice associato a q_s :

$$\phi_{\text{modello}} = \phi_{\text{prototipo}} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\text{modello}} = \Phi_{\text{prototipo}} \quad (4.10)$$

Come si può facilmente verificare, le condizioni di sinistra nelle (4.9) (4.10) sono automaticamente soddisfatte in condizioni di similitudine idraulica purché il materiale di fondo soddisfi le condizioni (peraltro evidenti da semplici considerazioni dimensionali):

densità dei sedimenti	$\lambda_{\rho_s} = \lambda_{\rho}$
dimensione dei sedimenti	$\lambda_d = \lambda$

Osservazioni

1. E' stato sperimentalmente verificato che il legame il coefficiente di scabrezza C di Chézy e la dimensione dei sedimenti d'alveo è del tipo:

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = f\left(\frac{R}{d}\right) \quad (4.11)$$

(concettualmente analoga al legame $\lambda(\epsilon/D)$ nell'abaco di Moody per il moto puramente turbolento). La similitudine geometrica dei sedimenti garantisce evidentemente $(R/d)_{\text{modello}} = (R/d)_{\text{prototipo}}$, e quindi l'eguaglianza dei coefficienti di Chézy come richiesto dalla similitudine di Froude ($\lambda_c = 1$).

Si tenga però conto che la legge (4.11) si riferisce alla sola quota-parte di resistenze dovute alla dimensione dei sedimenti, cui devono essere aggiunti gli effetti di vegetazione e di forma irregolare dell'alveo.

2. In similitudine di Froude risulta $\lambda_{Re^*} = \lambda^{3/2}$, sicché il numero indice Re^* diminuisce più che proporzionalmente alla scala geometrica nel passare da prototipo a modello in scala ridotta. Se nei problemi reali il valore di Re^* è usualmente sufficientemente elevato da poter considerare il trasporto indipendente da tale parametro, nei modelli a scala ridotta facilmente si esce dalla zona di autosimilitudine rispetto a Re^* : i fenomeni di trasporto risultano in tal caso a priori non riconducibili a quelli del prototipo.
3. La riduzione in scala geometrica della dimensione dei sedimenti può condurre a grani molto sottili nei modelli (una sabbia con $d = 1 \text{ mm}$ in scala $\lambda = 1/100$ viene ridotta a $d = 10 \mu\text{m}$). Per sedimenti molto fini può accadere una variazione *qualitativa* dei fenomeni di trasporto, qualora la corrente riesca a sollevare le particelle al suo interno (*trasporto in sospensione*). In tale caso le (4.7)-(4.8) cessano di valere, e comunque si perde la similitudine fenomenologica tra prototipo e modello.

Il passaggio del trasporto solido da moto di fondo a moto in sospensione è regolato dal numero indice w/u^* dove $u^* = (\tau/\rho)^{1/2}$ è la velocità di attrito della corrente e w è la velocità di caduta della particella solida in acqua per il solo effetto gravitazionale (velocità di sedimentazione). In prima approssimazione si può considerare che sia:

$$w = f(d, \mu, \gamma, \gamma_s)$$

Per $w/u^* > 1 \div 2$ non si verifica alcun trasporto in sospensione (le particelle eventualmente sollevate "cadono" immediatamente sul fondo); per valori minori del rapporto w/u^* sono presenti i due fenomeni di trasporto, e pertanto si deve assicurare la similitudine di entrambi (devono essere uguali i valori di ϕ e di w/u^* nel prototipo e nel modello).

Per approfondimenti si veda ad esempio Breusers e Raudkivi (1991).

4. Nella trattazione semplificata sopra svolta, i sedimenti sono stati caratterizzati semplicemente dalla loro densità ρ_s e dimensione caratteristica d . In effetti i fenomeni di

trasporto solido dipendono dall'intera distribuzione granulometrica dei sedimenti, che deve essere replicata in similitudine nel modello, così come gli eventuali effetti di coesione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Barenblatt G.I. (19??), *Dimensional Analysis*, Gordon and Breach Science Publishers.
- Breusers H.N.C., Raudkivi A.J. (1991), *Scouring*, IAHR Hydraulic Structures Design Manual, A.A. Balkema ed., Rotterdam.
- Citrini D., Nosedà G. (1987), *Idraulica*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano.
- Marchi E., Rubatta A. (1981), *Meccanica dei fluidi*, UTET, Torino.
- Munson B.R., Young D.F., Okiishi T.H. (1994), *Fundamentals of Fluid Mechanics*, 2° ed., John Wiley & Sons.
- Novak P., Éábelka J. (19??), *Models in Hydraulic Engineering. Physical Principles and Design Applications*, Pitman Advanced Publishing Program.