

MECCANICA DELLE CORRENTI
A SUPERFICIE LIBERA
A FONDO FISSO

Bozza di trattato redatto da:
G.Seminara, M. Tubino

Indice

1 I MODELLI	1
1.1 Introduzione .	1
1.2 Il modello tridimensionale	3
a Equazioni di Reynolds e problema di chiusura	3
b Condizioni al contorno	5
c Moto piano turbolento a superficie libera: stima della viscosità turbolenta	7
d Il modello tridimensionale su 'basse profondità'	9
e Un caso particolare: i moti piani	12
1.3 Il modello bidimensionale	12
1.4 Il modello unidimensionale: la corrente	17
a Nozione di corrente	17
b Trascurabilità della componente trasversale della velocità	19
c Trascurabilità delle variazioni trasversali del carico piezometrico	20
d Integrazione dell'equazione longitudinale nella direzione trasversale	21
e Integrazione dell'equazione di continuità	23
f Forma alternativa dell'equazione di De Saint-Venant .	23
1.5 Il modello zero-dimensionale	24
1.6 Considerazioni conclusive sulla formulazione dei problemi del moto nell'ambito dei diversi modelli	25
a Premessa	25

- b Nozioni generali sui sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine in due variabili dipendenti 25
- c Una particolare classe di sistemi di equazioni quasi-lineari del primo ordine 27

2) **CORRENTI UNIFORMI E STAZIONARIE A SUPERFICIE LIBERA** 29

- 2.1 Condizioni per il verificarsi di un moto stazionario uniforme . 29
- 2.2 Moti stazionari e uniformi di correnti 30
 - a Sezione di una corrente uniforme e sue proprietà 30
 - b Linea dei carichi effettivi 32
 - c L'equazione del moto uniforme nella forma di Chèzy . . 32
- 2.3 Valutazione del coefficiente di conduttanza C per sezioni di forma regolare 34
 - a Distribuzione di velocità 34
 - b La formula di Marchi per sezioni di forma regolare . . . 35
 - c Le formule empiriche per canali scabri 35
- 2.4 Problema di progetto 36
- 2.5 Il caso degli alvei naturali 37
 - a Valutazione della conduttanza di alvei irregolari 37
 - b Valutazione dei coefficienti correttivi della quantità di moto e dell'energia cinetica 39
 - c Scala di deflusso 40

3) **CORRENTI STAZIONARIE A SUPERFICIE LIBERA** 43

- 3.1 Grandezze critiche 43
 - a Profondità critica 43
 - b Velocità critica 49
 - c Pendenza critica 50
 - d Il caso degli alvei naturali 52
- 3.2 Le equazioni del moto 53
 - a Profili stazionari della corrente in alvei cilindrici o quasi-cilindrici 53

b	Andamento qualitativo dei profili per alvei cilindrici a pendenza costante	54
c	Integrazione per alvei rettangolari molto larghi con C costante (Bresse, 1860)	57
d	Andamento qualitativo dei profili per alvei cilindrici a pendenza variabile	60
e	Condizioni al contorno per il tracciamento dei profili	64
3.3	Deflusso di correnti cilindriche o quasi-cilindriche in prossimità di sezioni di controllo	65
a	Imbocco da un serbatoio	65
b	Sbocco in un serbatoio o in un bacino	68
c	Deflusso in prossimità di sfiori	69
d	Deflusso attraverso luci di fondo	82
e	L'effetto di restringimenti dell'alveo	86
3.4	Correnti con variazioni di portata	95
a	Afflussi laterali	95
b	Deflussi laterali	100
3.5	Modellazione numerica unidimensionale di moti stazionari	101
a	Introduzione	101
b	Richiami sull'esistenza e unicità della soluzione di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine	105
c	Soluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie del I ordine: schemi espliciti ed impliciti	106
d	Congruenza, convergenza, stabilità e precisione degli schemi numerici	108
e	Esempi di schemi numerici	111
f	L'equazione dei profili di rigurgito	122
4	CORRENTI NON STAZIONARIE A SUPERFICIE LIBERA	127
4.1	Preliminari: onde iperboliche e onde dispersive	127
a	Onde	127
b	Natura iperbolica del sistema differenziale che governa il moto delle correnti nel modello 1-D	128

	c	Le onde iperboliche nelle correnti come 'onde su acqua bassa'	129
	d	Onde dispersive	130
4.2		Onde iperboliche nelle correnti	134
	a	L'approssimazione cinematica: distorsione e irripidimento dell'onda	134
	b	L'approssimazione parabolica: attenuazione dell'onda	139
	c	L'approssimazione parabolica : linearizzazione	143
	d	Il metodo delle caratteristiche per le equazioni complete: effetti inerziali	145
	e	Qualche confronto: onde di piena e onde inerziali	147
	f	Ancora sulle onde di piena: massimi locali e colmi	152
	g	Scala di deflusso di una piena	154
4.3		Metodi numerici per la modellazione unidimensionale delle onde di piena	157
	a	Introduzione	157
	b	Il modello dell'onda cinematica	160
	c	Il modello numerico parabolico	167
	d	Il modello numerico del sistema completo	172
4.4		Onde progressive stabili	203
	a	Analisi generale e individuazione delle condizione per la presenza di un fronte frangente	203
	b	Onde deboli (non frangenti)	206
	c	Onde frangenti	207
	d	Un esempio di onda positiva: chiusura brusca di una paratoia in canale a sezione rettangolare.	211
	e	Un esempio di onda negativa: apertura brusca di una paratoia (il problema del crollo della diga)	215
4.5		Effetti dispersivi nelle onde di correnti a superficie libera: onde cnoidali e onda solitaria	217
	a	Equazioni di Boussinesq (1871)	217
	b	Equazione di Korteweg-de Vries (1895)	220
	c	Onda solitaria	222
	d	Onde cnoidali	224
4.6		Roll waves	226

5	CORRENTI BIDIMENSIONALI	231
5.1	Moti stazionari supercritici: teoria	231
a	Introduzione	231
b	Formulazione: l'equazione di Monge-Ampere	231
c	Analogia con i moti supersonici	234
d	Procedimento di soluzione fondato sul metodo delle caratteristiche	235
5.2	Moti stazionari supercritici: applicazioni	241
a	Onde prodotte da un graduale allargamento del canale	241
b	Sopraelevazione indotta in canali curvi	243
c	Brusca deviazione della parete: ventaglio di Prandtl- Meyer	247
d	Graduale restringimento: il risalto (urto) obliquo . . .	248
e	Risalto (urto) debole o forte?	252

Capitolo 1

I MODELLI

1.1 Introduzione

I processi di moto nei corsi d'acqua possono essere descritti attraverso modelli interpretativi caratterizzati da diversi gradi di complessità. Qualche esempio potrà essere d'ausilio per la comprensione di tale concetto.

Si supponga di voler analizzare il deflusso di una corrente fluviale in corrispondenza di una curva, un fenomeno di una certa rilevanza perché, come emergerà nel seguito tale moto controlla i rilevanti processi di erosione che si manifestano in prossimità della sponda esterna e l'accumulo di sedimenti che si osserva in vicinanza della sponda interna. Tale deflusso è caratterizzato dalla generazione di un moto secondario elicoidale che presenta una componente trasversale di velocità diretta verso l'esterno in prossimità della superficie libera e verso l'interno in vicinanza del fondo. Come conseguenza si ha un trasporto trasversale netto di quantità di moto longitudinale verso l'esterno e quindi uno spostamento del filone centrale della corrente (fig. 1.1). La descrizione di tale moto non può essere effettuata ignorando le componenti trasversale e verticale della velocità del fluido che danno luogo al moto secondario. Si rivela cioè necessaria in questo caso l'adozione di un *modello tridimensionale*.

Meno elevato è il livello di sofisticazione del modello necessario per descrivere il campo di moto indotto dalla propagazione della marea in un bacino confinato (fig. 1.2). In questo caso il ruolo delle componenti verticali di velocità è modesto e risulta sufficientemente adeguata l'adozione di un *modello bidimensionale* in cui le grandezze caratteristiche del moto sono mediate lungo la verticale.

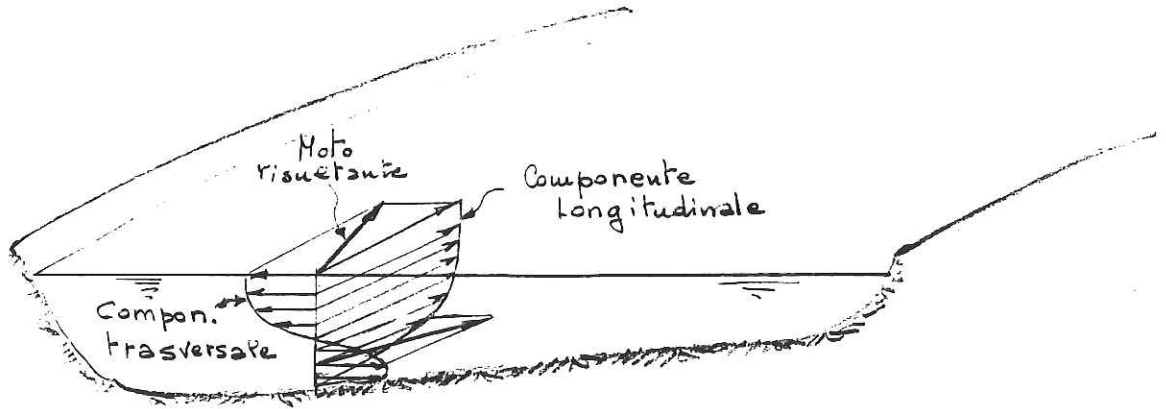


Figura 1.1: Il moto secondario in curva non può essere compiutamente descritto se non si adotta un modello 3-D.

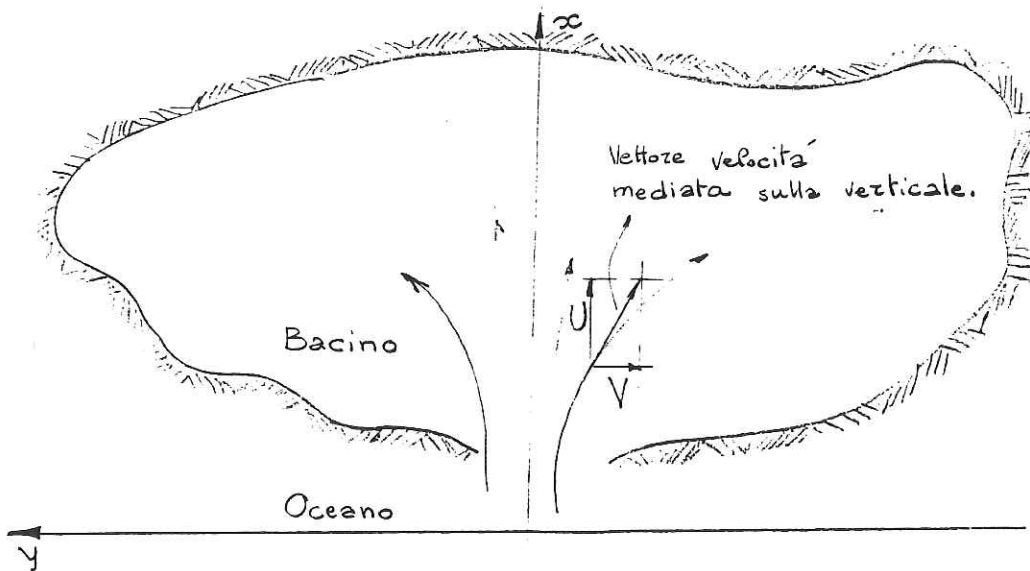


Figura 1.2: Per lo studio del campo di moto indotto dalla propagazione mareale in un bacino confinato è adeguato un modello 2-D.

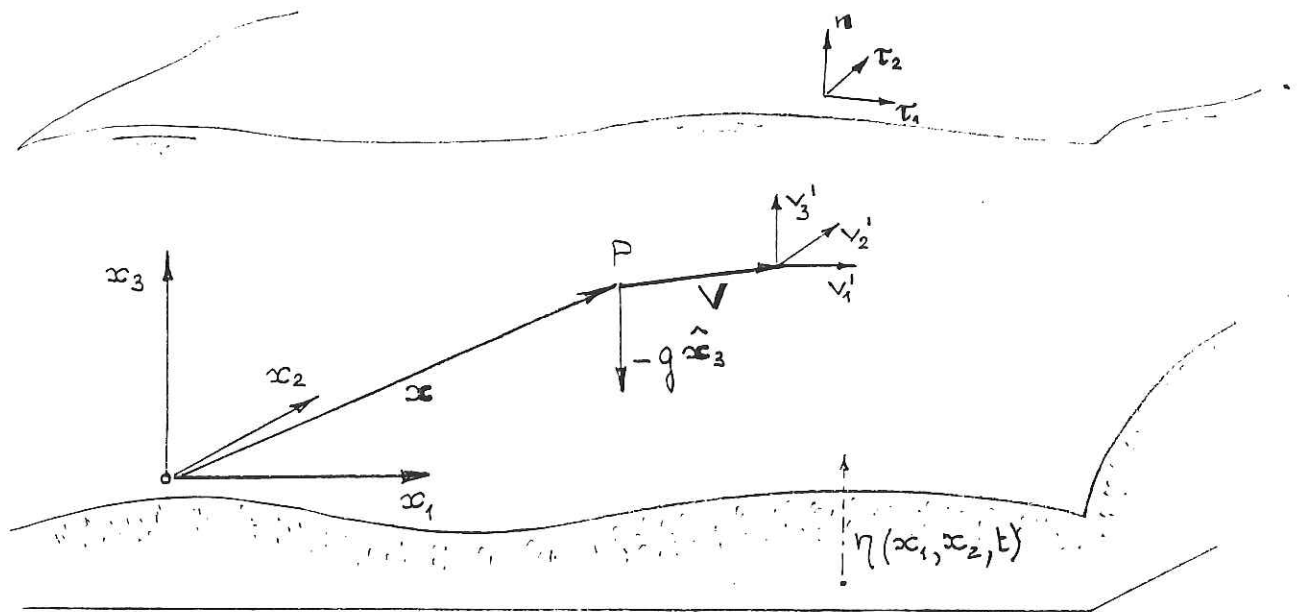


Figura 1.3: Notazioni.

Per la descrizione dei profili di rigurgito nei corsi d'acqua o per lo studio della propagazione delle onde di piena è poi sufficiente l'adozione di un *modello monodimensionale* in cui le grandezze caratteristiche del moto sono mediate nella sezione.

Infine il processo di riempimento e svuotamento di un serbatoio può essere adeguatamente interpretato addirittura ignorando la dinamica del deflusso ed imponendo esclusivamente il bilancio fra volumi entranti e volumi accumulati, cioè il principio della conservazione della massa. Si parla in questo caso di *modello zero-dimensionale*.

1.2 Il modello tridimensionale

a Equazioni di Reynolds e problema di chiusura

Consideriamo il deflusso dell'acqua, fluido viscoso ed incompressibile, in un tronco fluviale. Descriveremo il moto con riferimento ad una terna cartesiana (x_1, x_2, x_3) fissa nello spazio. Assumeremo inoltre un punto di vista Euleriano sicché le grandezze che descrivono il moto delle particelle risulteranno funzioni della posizione \mathbf{x} e del tempo t (figura 1.3).

Il moto dell'acqua nei corpi idrici naturali, fatta eccezione al più per i moti di filtrazione nei mezzi porosi, risulta invariabilmente *turbolento*. La Meccanica dei Fluidi, a cui rimandiamo il lettore per un approfondimento di questa premessa, dedica una grande attenzione allo studio della Turbolenza (vedi il fascicolo Turbolenza della collana), il cui carattere di imprevedibilità rende sostanzialmente un approccio di tipo deterministico, almeno per i moti caratterizzati da valori del numero di Reynolds Re tipici delle correnti fluviali ($Re \simeq 10^7$). Lo studio della turbolenza ha quindi condotto ad una varietà di procedimenti approssimati, empiricamente fondati, che trattano la turbolenza come un processo stocastico e fanno riferimento ad una descrizione mediata del campo di moto. Com'è noto l'ipotesi di stazionarietà ed ergodicità del processo consente poi di sostituire alle medie d'insieme (probabilistiche) delle medie temporali. Indicheremo nel seguito con \mathbf{V} e P i valori medi del vettore velocità e della pressione e inoltre con $\bar{\mathbf{t}}$ e $\bar{\mathbf{T}}$ i valori medi del vettore e del tensore delle tensioni rispettivamente. Analogamente siano \mathbf{v}' e p' le fluttuazioni di velocità e pressione rispetto ai valori medi predetti.

Operando dunque la media sulle equazioni di Navier-Stokes, scritte rispetto alla terna cartesiana x_1, x_2, x_3 si ottengono le equazioni di Reynolds (1895) nella forma

$$\frac{DV_i}{Dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_\ell^2} - g \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{x}}_i - \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\overline{v'_i v'_j}) \quad (1.2.1)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2.2)$$

con g accelerazione di gravità, $\hat{\mathbf{z}}$ versore dell'asse z verticale e diretto verso l'alto, ρ densità e ν viscosità cinematica del fluido.

Com'è noto le (1.2.1) pongono un *problema di chiusura* che consiste essenzialmente nella necessità di individuare un legame, in forma algebrica o differenziale, fra le sei componenti del tensore simmetrico di Reynolds $T_{ij}^t \equiv \rho (\overline{-v'_i v'_j})$ e le caratteristiche del moto medio. I procedimenti semiempirici di chiusura disponibili in letteratura sono dettagliatamente discussi nel fascicolo Turbolenza di questa collana, a cui rimandiamo il lettore. È qui sufficiente per i nostri scopi ricordare che un procedimento di chiusura che si rivela adeguato per gli scopi della tecnica quando il moto medio è lentamente variabile nello spazio e nel tempo (sono cioè assenti fenomeni di separazione o effetti legati alla forte curvatura delle linee di corrente del moto medio) consiste nell'esprimere le tensioni di Reynolds nella forma di

Boussinesq (1877)

$$-\overline{v'_i v'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (1.2.3)$$

con ν_T caratteristica del moto detta *viscosità turbolenta*, k energia turbolenta specifica ($\equiv 1/2 \overline{v'_i^2}$) e δ_{ij} indice di Kronecker. Il problema di modellazione si sposta quindi in quello della valutazione di ν_T in funzione delle caratteristiche del moto, una questione a cui è stata data risposta a diversi livelli di sofisticazione attraverso numerosi procedimenti approssimati.

Per la sistematica derivazione dei modelli tri-, bi-, mono-, e zero- dimensionali è di rilievo disporre di una stima dell'ordine di grandezza di ν_T . Ciò è possibile facendo riferimento al moto turbolento in una corrente uniforme a superficie libera. Nel punto c seguente vedremo che in tal caso la viscosità turbolenta ha una distribuzione lungo la verticale prossima ad una parabola con valore massimo intorno a $(0.1 u_* Y)$ essendo u_* il valore locale della velocità d'attrito ed Y il valore locale della profondità.

b Condizioni al contorno

La scelta delle condizioni al contorno da associare al problema nella forma tridimensionale è spesso cruciale per l'effettiva efficacia del particolare modello di turbolenza adottato.

La condizione teoricamente da imporre in corrispondenza del contorno bagnato del campo di moto è quella *di aderenza*. In presenza di un contorno bagnato fisso essa dovrebbe tradursi nella condizione

$$V_1 = V_2 = V_3 = 0 \quad (1.2.4)$$

È noto tuttavia che il carattere turbolento del moto rende assai problematica l'applicazione della (1.2.4). Infatti le estreme difficoltà incontrate nel descrivere il moto nelle immediate vicinanze delle asperità della parete e la rapidità con cui la velocità varia nello strato (detto *di equilibrio*) ad essa prossimo ha suggerito, nel caso dei moti (mediamente) unidirezionali e stazionari (detti anche uniformi), di porre convenzionalmente nulla la velocità a una distanza, empiricamente definita, che dipende da un numero di Reynolds di parete o dalla scabrezza relativa o da entrambi tali parametri in dipendenza dal regime (rispettivamente liscio, scabro o di transizione) della turbolenza. Tale procedimento ignora la effettiva struttura (fortemente non stazionaria e instabile) del moto nelle immediate vicinanze delle asperità.

L'efficacia di tale procedimento si è rivelata estendibile a situazioni in cui il moto si discosta poco dalla configurazione (mediamente) unidirezionale. In tal caso le (1.2.4) vengono applicate a una distanza dal fondo pari a una frazione della profondità *locale*, coincidente con il valore che si ottiene per un moto uniforme con le caratteristiche locali.

Per configurazioni di moto fortemente tridimensionali le (1.2.4) vengono sostituite da condizioni che impongono che il comportamento della velocità tangenziale alla parete a una certa distanza, misurata normalmente alla parete stessa, presenti un andamento di tipo logaritmico. Esso si fonda sull'assunto che la struttura della turbolenza di parete presenti caratteristiche di universalità che ne consentono l'adozione in casi anche molto diversi da quello per il quale tale struttura è stata accertata.

Accanto a tale condizione va imposta poi, come è ovvio, la condizione che la componente della velocità relativa normale alla parete sia nulla.

Più agevole è la formulazione delle condizioni al contorno da adottare in corrispondenza della superficie libera $h(x_1, x_2, t)$.

La condizione cinematica valida per il moto istantaneo è, come noto,

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_{F=0} = \left\{ \frac{d}{dt}[x_3 - h(x_1, x_2, t)] \right\}_{F=0} = 0 \quad (1.2.5)$$

avendo indicato con $F = (x_3 - h)$ la funzione che si annulla sulla superficie libera. Effettuando l'operazione di media segue:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_2} - V_3 = 0 \quad (1.2.6)$$

Accanto alla (1.2.6) occorre poi imporre condizioni di continuità per le tensioni in corrispondenza della superficie libera. Trascurando le tensioni viscosive, segue

$$\mathbf{n} \cdot (-PI + \mathbf{T}^t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.2.7)$$

essendo \mathbf{n} il versore normale alla superficie libera definito nella forma

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (1.2.8)$$

e \mathbf{T}^t il tensore delle tensioni turbolente, la cui componente generica può essere espressa nella forma (1.2.3). Si noti inoltre che la continuità delle tensioni normali è espressa dalla (1.2.7) in assenza di significative variazioni della

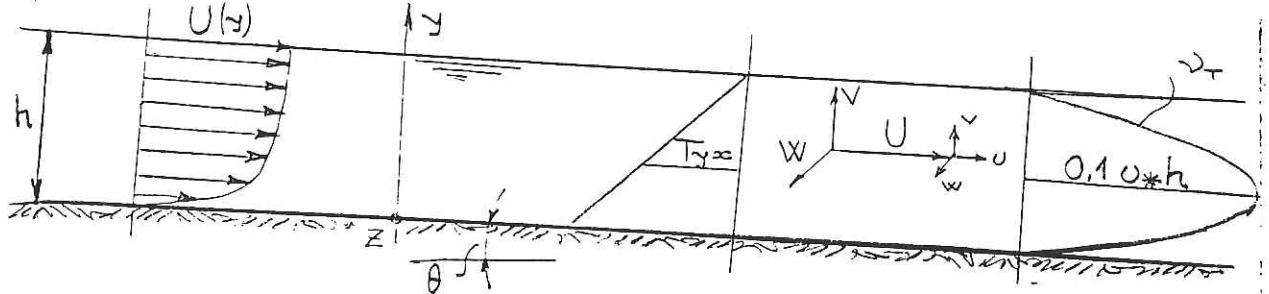


Figura 1.4: Moto piano turbolento uniforme a superficie libera.

pressione atmosferica sulla superficie libera, che deve inoltre non presentare curvature tali da indurre apprezzabili effetti legati alla tensione superficiale.

Detti infine τ_1 e τ_2 due vettori appartenenti al piano tangente alla superficie libera, fra loro normali segue

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^t \cdot \tau_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}^t \cdot \tau_2 = 0 \quad (1.2.9a, b)$$

Cioè in assenza di apprezzabile effetto di un eventuale vento spirante sulla superficie libera questa deve risultare non sollecitata neppure da tensioni tangenziali.

c Moto piano turbolento a superficie libera: stima della viscosità turbolenta

Consideriamo un moto piano turbolento uniforme a superficie libera riferito alla terna cartesiana (x, y, z) in figura 1.4, con (U, V, W) vettore velocità media.

Tale moto risulta uniforme nella direzione x e si ripete identicamente su tutti i piani paralleli al piano coordinato xy . Ne consegue che tutte le caratteristiche medie del moto risultano indipendenti dalle coordinate x e z (si dice che la turbolenza è *omogenea* in tali direzioni).

Con le notazioni in figura 1.4 segue:

$$V = W = \frac{\partial(\overline{\quad})}{\partial x} = \frac{\partial(\overline{\quad})}{\partial z} \equiv 0 \quad (1.2.10)$$

Le equazioni di Reynolds esplicitate in questo caso si riducono alle relazioni:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1.2.11)$$

$$\frac{d}{dy} \left[-\overline{uv} + \nu \frac{dU}{dy} \right] = -g \sin \theta \quad (1.2.12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (1.2.13)$$

$$\frac{d}{dy} \left[\frac{P}{\rho} + v^2 \right] = 0 \quad (1.2.14)$$

Il legame (1.2.3) suggerisce inoltre che la struttura del tensore di Reynolds è la seguente:

$$\{\mathbf{T}^t\} \equiv \begin{pmatrix} -\overline{u^2} & -\overline{uv} & 0 \\ -\overline{vu} & -\overline{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{w^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}k & \nu_T \frac{dU}{dy} & 0 \\ \nu_T \frac{dU}{dy} & -\frac{2}{3}k & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}k \end{pmatrix} \quad (1.2.15)$$

Dunque l'unica tensione tangenziale di Reynolds non nulla è $(-\overline{uv})$, mentre la tensione totale T_{yx} definita nella forma

$$\frac{T_{yx}}{\rho} = -\overline{uv} + \nu \frac{dU}{dy} = (\nu + \nu_T) \frac{dU}{dy} \quad (1.2.16)$$

presenta la distribuzione lineare che discende come soluzione della (1.2.12) con la condizione al contorno:

$$T_{yx}|_{y=h} = 0 \quad (1.2.17)$$

Si trova:

$$T_{yx} = g \sin \theta (h - y) \quad (1.2.18)$$

donde, ricordando la (1.2.16), segue:

$$(\nu + \nu_T) \frac{dU}{dy} = g \sin \theta (h - y) \quad (1.2.19)$$

La struttura della viscosità turbolenta può ricavarsi dalla (1.2.19) ricordando che la distribuzione della velocità media U è logaritmica almeno nella regione prossima alla parete. Precisamente:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{k} \ln y + \text{costante} \quad (1.2.20)$$

dove k è la costante di V. Karman e u_* è la velocità d'attrito definita nella forma

$$u_* = \sqrt{\frac{|T_{yx}|_{y=0}}{\rho}} = \sqrt{g \sin \theta h} \quad (1.2.21)$$

Segue

$$\frac{dU}{dy} = \frac{u_*}{ky} \quad (1.2.22)$$

e quindi

$$\nu_T \simeq (\nu + \nu_T) = ku_* y \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (1.2.23)$$

La distribuzione di viscosità turbolenta è dunque parabolica e presenta valori compresi fra 0 e $(0.1u_*h)$.

d Il modello tridimensionale su 'basse profondità'

Esiste una vasta classe di moti a superficie libera nei quali una componente della velocità media (verticale o quasi-verticale) risulta più piccola di almeno un ordine di grandezza rispetto alle altre due componenti, che possiamo denominare longitudinale e trasversale. Affinché sussista tale condizione è necessario che la profondità caratteristica del moto in questione risulti piccola rispetto alla scala spaziale su cui avvengono le variazioni longitudinale e trasversale del campo di moto. Queste ultime possono essere in generale legate a variazioni di geometria della frontiera fissa del moto (planimetriche e/o altimetriche) o della superficie libera (propagazione di onde). È dunque necessario che le variazioni di geometria siano sufficientemente *lente* o le onde *sufficientemente lunghe*. Ulteriore possibile sorgente di disuniformità è quella legata agli effetti di stratificazione che debbono essere quindi sufficientemente modesti da non indurre *velocità di galleggiamento* apprezzabili.

Tali ipotesi sono verificate dalle onde di piena dei corsi d'acqua naturali, dalle circolazioni lacustri e costiere. La conseguenza principale delle condizioni indicate è la trascurabilità, nell'equazione del moto proiettata nella direzione ortogonale al piano longitudinale-trasversale (sia z la coordinata in tale direzione che è quasi verticale), dell'accelerazione (convettiva e locale), dell'azione di galleggiamento e del flusso delle tensioni rispetto all'accelerazione di gravità. L'equilibrio dinamico in tale direzione si riduce a un equilibrio statico che determina la *distribuzione delle pressioni* in tale direzione come *idrostatica*.

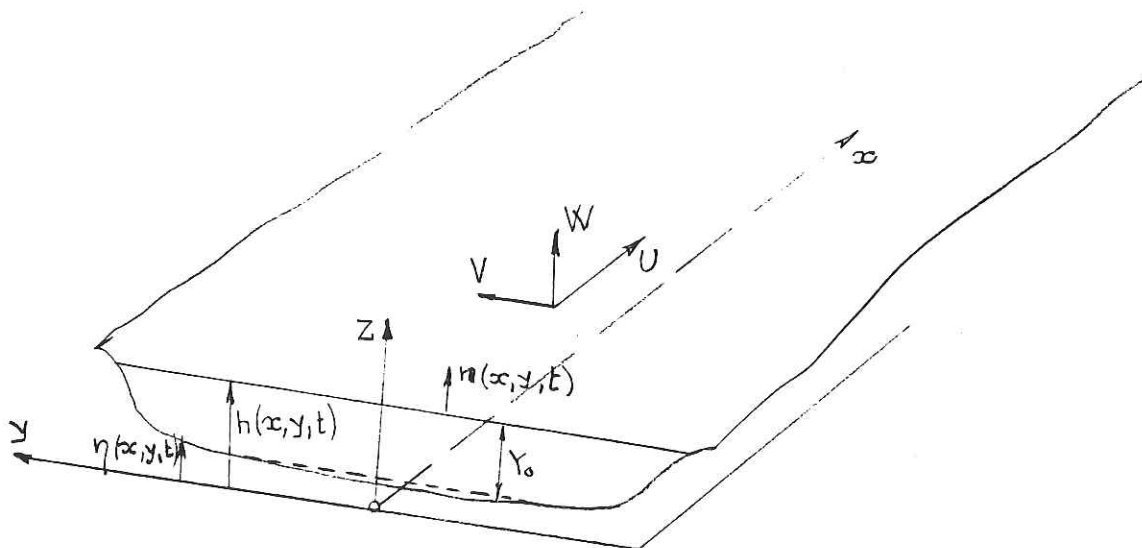


Figura 1.5:

Poniamo infatti (vedi figura 1.5) che sia Y_0 la scala delle profondità ed L la scala delle variazioni longitudinale e trasversale delle grandezze idrodinamiche. Sia inoltre U_0 l'ordine di grandezza di U e V , componenti della velocità media nelle predette direzioni individuate dalle coordinate x ed y rispettivamente. Sia poi ΔU_0 la scala delle loro variazioni trasversali e longitudinali, cioè in y ed x rispettivamente. Poniamo infine

$$\frac{Y_0}{L} = \delta \ll 1 \quad (1.2.24)$$

Operiamo una stima degli ordini di grandezza dei termini che compaiono nelle equazioni del moto. Ciò si può effettuare sostituendo alle derivate rapporti fra le scale di variazione delle grandezze.

Consideriamo l'equazione di continuità che si scrive

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1.2.25)$$

L'ordine di grandezza di $\partial W / \partial z$ può essere stimato nella forma (W_0 / Y_0) con W_0 ordine di grandezza della componente della velocità media nella direzione z . Analogamente si ha

$$\frac{\partial V}{\partial y} \sim \frac{\partial U}{\partial x} \sim O\left(\frac{\Delta U_0}{L}\right) \quad (1.2.26)$$

Imponendo il bilancio imposto dalla (1.2.11) segue infine

$$W_o \sim O(\delta \Delta U_o) \quad (1.2.27)$$

cioè W_o è molto più piccolo di ΔU_o .

La componente secondo z della (1.2.1) indicate con u, v, w le componenti del vettore fluttuazione di velocità turbolenta, si scrive:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left[\frac{\partial W}{\partial t} \right]}_{O(\delta \frac{\Delta U_o}{t_o})} + \underbrace{\left[U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right]}_{O(\delta \frac{U_o}{L} \Delta U_o)} + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g \cos \theta \right] + \\ + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \langle wu \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle wv \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle ww \rangle \right]}_{O(\nu_{T_o} \frac{\Delta U_o}{Y_o L})} = 0 \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

dove sono stati indicati gli ordini di grandezza dei diversi termini, avendo trascurato le tensioni viscosse, indicato con θ l'angolo che la verticale forma con l'asse z , con t_o la scala temporale del moto e con ν_{T_o} un valore di riferimento per la viscosità turbolenta.

Poiché ΔU_o è al più di ordine U_o per definizione, l'accelerazione convettiva è trascurabile rispetto all'accelerazione di gravità se, posto $\cos \theta \cong 1$, risulta

$$\delta \frac{U_o^2}{L} \ll g \Rightarrow F_o^2 \delta^2 \ll 1 \quad (1.2.29 a, b)$$

con F_o valore caratteristico del numero di Froude. Analoga condizione si ottiene nel confronto fra accelerazione locale e accelerazione di gravità se $t_o \sim 0(L/U_o)$. La (1.2.29) è largamente soddisfatta nei moti menzionati in precedenza.

Più complessa è la valutazione dell'ordine di grandezza delle tensioni di Reynolds e del loro flusso. Si può tuttavia fare appello alla (1.2.3) che riconduce tale valutazione a quelle relative al moto medio e alla viscosità turbolenta. Ricordando inoltre che

$$\nu_{T_o} \sim O\left(\frac{u_{*o} Y_o}{10}\right) \quad (1.2.30)$$

con u_{*o} ordine di grandezza della velocità di attrito, donde il confronto fra flusso delle tensioni di Reynolds e accelerazione di gravità pone, al più, la condizione

$$\frac{1}{10} \frac{u_{*o}}{U_o} \frac{U_o^2}{L} \ll g \Rightarrow \frac{u_{*o}}{U_o} F_o^2 \delta \ll 10 \quad (1.2.31 a, b)$$

La (1.2.31) è anch'essa largamente soddisfatta nella classe di moti qui considerati.

Le equazioni tridimensionali dei moti non stratificati su basse profondità si scrivono dunque, in coordinate cartesiane, nella forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle uv \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle uw \rangle = 0 \quad (1.2.32a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \langle vu \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle v^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle vw \rangle = 0 \quad (1.2.32b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1.2.32c)$$

avendo indicato con $h(x, y, t)$ la quota del pelo libero rispetto al piano (x, y) . Le condizioni al contorno da associare al problema così formulato non sono dissimili da quelle discusse al punto 1.2 b.

e Un caso particolare: i moti piani

Un caso particolare della classe di moti di cui al punto a) si ottiene quando anche la componente trasversale della velocità media V è nulla e il moto si ripete identicamente su tutti i piani paralleli al piano (x, z) .

Le equazioni dei moti piani non stratificati su basse profondità sono dunque:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \langle u^2 \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle uw \rangle = 0 \quad (1.2.33a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1.2.33b)$$

Tale schema è adottabile nel caso di alvei molto larghi quando siano verificate le già menzionate condizioni di assenza di stratificazione e di bassa profondità.

1.3 Il modello bidimensionale

Nelle condizioni descritte al punto 1.2 c, cioè per moti non stratificati su 'basse' profondità, è in genere di interesse la valutazione delle sole componenti longitudinale e trasversale del moto ed è spesso sufficientemente accettabile

per gli scopi della tecnica la conoscenza dei valori di tali componenti mediate lungo la direzione z .

Se si esegue l'operazione di media sulla verticale delle (1.2.18) sia il numero delle componenti di velocità sia il numero delle variabili spaziali che compaiono nelle equazioni ottenute si riducono da 3 a 2. Si parla perciò di modello *bidimensionale* del campo di moto.

Definite *sezioni* del campo di moto le intersezioni di quest'ultimo con piani ortogonali alla direzione longitudinale e detta $\eta(x, y, t)$ la quota del contorno bagnato della sezione, consideriamo i termini convettivi della (1.2.18a).

L'equazione di continuità nella forma (1.2.18c) consente di scrivere

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial(UW)}{\partial z} \quad (1.3.1)$$

Integrando lungo la verticale segue:

$$\begin{aligned} & \int_{\eta}^h \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(UV) + \frac{\partial}{\partial z}(UW) \right\} dz = \quad (1.3.2) \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\eta}^h U dz - (U)_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t} + (U)_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^h U^2 dz - (U^2)_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + (U^2)_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^h UV dz - (UV)_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + (UV)_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + (UW)_{z=h} - (UW)_{z=\eta} \end{aligned}$$

Definite allora le velocità mediate sulla verticale nella forma

$$\tilde{U} = \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h U dz \quad , \quad \tilde{V} = \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h V dz \quad (1.3.3 a, b)$$

con Y valore locale della profondità del moto, ricordiamo la forma assunta dalle condizioni cinematiche sulla superficie libera e sul contorno bagnato considerato anch'esso come una superficie materiale:

$Y = h - \eta$

$$\frac{\partial(\eta, h)}{\partial t} + (U)_{z=\eta, h} \frac{\partial(\eta, h)}{\partial x} + (V)_{z=\eta, h} \frac{\partial(\eta, h)}{\partial y} - (W)_{z=\eta, h} = 0 \quad (1.3.4)$$

Utilizzando la (1.3.4) il primo membro della (1.3.2) diventa allora:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Y\tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial x}(Y\tilde{U}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(Y\tilde{U}\tilde{V}) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^h (U - \tilde{U})^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^h (U - \tilde{U})(V - \tilde{V}) dz \quad (1.3.5)$$

Si noti che per ottenere la (1.3.5) dalla (1.3.2) occorre osservare che risulta:

$$\int_{\eta}^h U^2 dz = \int_{\eta}^h (U - \tilde{U})^2 dz + 2 \int_{\eta}^h U \tilde{U} dz - \int_{\eta}^h \tilde{U}^2 dz = \int_{\eta}^h (U - \tilde{U})^2 dz + Y \tilde{U}^2 \quad (1.3.6)$$

e un'analogha espressione può ricavarsi per l'integrale $\int_{\eta}^h UV dz$.

Analogamente il flusso delle tensioni $T_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$ mediato lungo la verticale pone:

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^h \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) dz &= -(T_{xx})_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} - (T_{xy})_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} + (T_{xz})_{z=h} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\eta}^h T_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\eta}^h T_{xy} dz + (T_{xx})_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + (T_{xy})_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} - (T_{xz})_{z=\eta} \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Se

$$\mathcal{F} = z - h(x, y, t) \quad (1.3.8)$$

è l'equazione della superficie libera, il versore ad essa normale positivamente diretto verso l'esterno può porsi nella forma $\nabla \mathcal{F} / |\nabla \mathcal{F}|$ donde

$$n_x = \frac{-h_{,x}}{\sqrt{1 + h_{,x}^2 + h_{,y}^2}} \quad n_y = \frac{-h_{,y}}{\sqrt{1 + h_{,x}^2 + h_{,y}^2}} \quad n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + h_{,x}^2 + h_{,y}^2}} \quad (1.3.9a - c)$$

$$\left[-T_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} - T_{xy} \frac{\partial h}{\partial y} + T_{xz} \right]_{z=h} = [t_x]_{z=h} \sqrt{1 + (h_{,x})^2 + (h_{,y})^2} = \frac{(t_x)_h}{n_z} \simeq t_x|_h \quad (1.3.10)$$

$$\left[-T_{xx} \frac{\partial \eta}{\partial x} - T_{xy} \frac{\partial \eta}{\partial y} + T_{xz} \right]_{z=\eta} = [t_x]_{z=\eta} \sqrt{1 + (\eta_{,x})^2 + (\eta_{,y})^2} = \frac{(t_x)_{\eta}}{n_z} \simeq t_x|_{\eta} \quad (1.3.11)$$

essendo per la (1.2.24) le derivate spaziali di h ed η piccole. Nella (1.3.10) si è indicata con $(t_x)_{z=h}$ la componente secondo x del vettore tensione agente sulla superficie libera e analogamente per $(t_x)_{z=\eta}$. Sempre la (1.2.14) suggerisce che sia la superficie libera sia la superficie del fondo presentano inclinazioni piccole rispetto agli assi x ed y . Ne consegue che t_x può confondersi con la componente secondo x della tensione *tangenziale* esercitata sulla superficie libera (τ_x^s) e sul contorno (τ_x^f); dunque

$$[t_x]_{z=h} \cong \tau_x^s \quad [t_x]_{z=\eta} \cong \tau_x^f \quad (1.3.12a, b)$$

Il lettore osservi che le quantità τ_x^s e τ_x^f rappresentano le azioni che l'esterno esercita sulla superficie libera e sul fondo rispettivamente e vanno quindi

assunte col loro segno. Va osservato inoltre che tanto le (1.3.10) come le (1.3.11) cadono in difetto quando non sia localmente soddisfatta la condizione di *lenta* variazione con x e y delle grandezze caratteristiche del moto, in particolare delle funzioni h ed η . Ciò si verifica per esempio in prossimità delle sponde.

Operando analogamente nel caso delle (1.2.32a,b,c) si perviene alla formulazione bidimensionale del problema del moto nella forma:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Y\tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(Y\tilde{V}) = 0 \quad (1.3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(Y\tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial x}(Y\tilde{U}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(Y\tilde{U}\tilde{V}) + gY\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(Y\tilde{T}_{xx}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(YT_{xx}^{(disp)}) + \\ - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(Y\tilde{T}_{xy}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(YT_{xy}^{(disp)}) - \frac{1}{\rho}(\tau_x^s + \tau_x^f) = 0 \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(Y\tilde{V}) + \frac{\partial}{\partial x}(Y\tilde{U}\tilde{V}) + \frac{\partial}{\partial y}(Y\tilde{V}^2) + gY\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(Y\tilde{T}_{xy}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(YT_{xy}^{(disp)}) + \\ - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(Y\tilde{T}_{yy}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}(YT_{yy}^{(disp)}) - \frac{1}{\rho}(\tau_y^s + \tau_y^f) = 0 \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

avendo introdotto *valori mediati* delle componenti del tensore delle tensioni e *tensioni efficaci dispersive* nella forma seguente:

$$\tilde{T}_{xx} = \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h -\rho \langle u^2 \rangle dz \quad T_{xx}^{(disp)} = -\frac{\rho}{Y} \int_{\eta}^h (U - \tilde{U})^2 dz \quad (1.3.16 a, b)$$

$$\tilde{T}_{xy} = \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h -\rho \langle uv \rangle dz \quad T_{xy}^{(disp)} = -\frac{\rho}{Y} \int_{\eta}^h (U - \tilde{U})^2 (V - \tilde{V}) dz \quad (1.3.17 a, b)$$

$$\tilde{T}_{yy} = \frac{1}{Y} \int_{\eta}^h -\rho \langle v^2 \rangle dz \quad T_{yy}^{(disp)} = -\frac{\rho}{Y} \int_{\eta}^h (V - \tilde{V})^2 dz \quad (1.3.18 a, b)$$

Le cosiddette tensioni *dispersive* sono in realtà, come è chiaro, termini inerziali associati agli scostamenti delle distribuzioni della velocità lungo z rispetto ai relativi valori medi.

Sostituendo la (1.3.13) nelle (1.3.14, 15) e tenendo conto delle (1.3.16-18), le (1.3.13-15) possono risciversi nella forma:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Y\tilde{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(Y\tilde{V}) = 0 \quad (1.3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\tau_x^s + \tau_x^f}{\rho Y} + \\ + \frac{1}{\rho Y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [Y (\tilde{T}_{xx} + T_{xx}^{(disp)})] + \frac{\partial}{\partial y} [Y (\tilde{T}_{xy} + T_{xy}^{(disp)})] \right\} \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\tau_y^s + \tau_y^f}{\rho Y} + \\ + \frac{1}{\rho Y} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [Y (\tilde{T}_{xy} + T_{xy}^{(disp)})] + \frac{\partial}{\partial y} [Y (\tilde{T}_{yy} + T_{yy}^{(disp)})] \right\} \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Qualche osservazione generale s'impone sulla struttura delle (1.3.19-21).

Anzitutto il ruolo delle tensioni di Reynolds del modello tridimensionale si traduce nella presenza di termini nelle tensioni longitudinale e trasversale al fondo e in superficie e nei termini nei valori medi delle tensioni agenti sui piani verticali.

La quantificazione dei primi richiede di istituire una qualche correlazione fra τ^f e il moto medio, e fra τ^s e le caratteristiche del vento eventualmente agente sulla superficie libera (ovvero $\tau^s = 0$ come espresso dalle 1.2.9).

I termini nelle derivate longitudinale e trasversale delle tensioni consistono in due componenti:

- quella associata allo scostamento della distribuzione lungo z delle componenti di velocità dall'andamento uniforme;
- quella dovuta alle variazioni spaziali dei valori medi delle tensioni di Reynolds agenti su piani verticali (le tensioni viscosse sono state trascurate rispetto alle tensioni di Reynolds).

I modelli idrodinamici bidimensionali usualmente trascurano entrambi tali contributi. Invero se le scale spaziali adottate nell'analisi del punto 1.2a sono valide anche per la valutazione degli ordini di grandezza dei termini nelle tensioni delle (1.3.20) e (1.3.21) può dimostrarsi facilmente la loro trascurabilità.

Per quanto concerne le tensioni agenti sulla superficie libera e sul fondo si fa uso, per la loro quantificazione della assunta *lenta* variazione delle caratteristiche del moto sia nel tempo sia nelle direzioni longitudinale e trasversale. Ciò suggerisce di trattare i termini di resistenza come dovuti ad una successione quasi-stazionaria di moti quasi-uniformi caratterizzati dai valori

locali delle velocità (in modulo direzione e verso) e delle caratteristiche di scabrezza. Si può allora porre:

$$\tau_x^f = -\rho r_f \tilde{U} \sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2} \quad \tau_y^f = -\rho r_f \tilde{V} \sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2} \quad (1.3.22)$$

$$\tau_x^s = \rho_a r_v U_v \sqrt{U_v^2 + V_v^2} \quad \tau_y^s = \rho_a r_v V_v \sqrt{U_v^2 + V_v^2} \quad (1.3.23)$$

con r_f coefficiente di resistenza relativo ad un moto uniforme caratterizzato dai valori locali della profondità e della scabrezza, r_v coefficiente di resistenza relativo al moto del vento sulla superficie libera e ρ_a densità dell'aria. Il valore di r_f si calcola sulla base delle conoscenze relative al moto uniforme nelle correnti a superficie libera (vedi cap. 2). Il valore di r_v assume tipicamente valori intorno a 1.5×10^{-3} .

Utilizzando le (1.3.22, 23) e con le ipotesi precedenti le equazioni dei moti bidimensionali assumono la forma classica:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial(Y\tilde{U})}{\partial x} + \frac{\partial(Y\tilde{V})}{\partial y} = 0 \quad (1.3.24)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\rho_o}{\rho} r_v \frac{U_v \sqrt{U_v^2 + V_v^2}}{Y} - r_f \frac{\tilde{U} \sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2}}{Y} \quad (1.3.25)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\rho_o}{\rho} r_v \frac{V_v \sqrt{U_v^2 + V_v^2}}{Y} - r_f \frac{\tilde{V} \sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2}}{Y} \quad (1.3.26)$$

Tuttavia, come vedremo nel seguito, l'uso di modelli bidimensionali è spesso esteso a situazioni che si discostano sensibilmente da quelle formulate al punto 1.2. In particolare modelli bidimensionali vengono talvolta adottati per descrivere configurazioni in cui si manifesta la presenza di *moti secondari*, cioè regioni di ricircolazione in cui le componenti longitudinale e trasversale del moto subiscono variazioni spaziali non sufficientemente piccole né lente. E' fisicamente intuitivo che in tali condizioni il ruolo delle tensioni tangenziali agenti su piani verticali (e quindi delle loro medie) risulti non trascurabile. Si pone in tal caso per essi un problema di chiusura bidimensionale analogo a quello posto nel contesto tridimensionale.

1.4 Il modello unidimensionale: la corrente

a Nozione di corrente

Una vasta gamma di moti a superficie libera, in particolare nei corsi d'acqua, nei canali artificiali e nei canali lagunari, può essere descritta e quan-

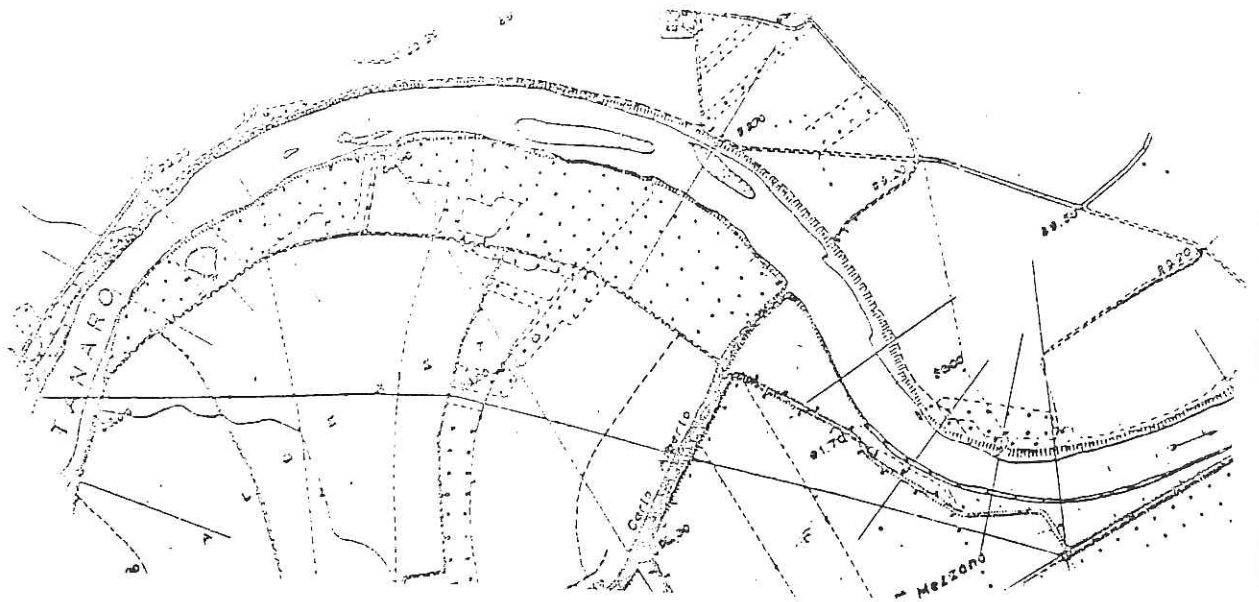


Figura 1.6: Planimetria di un tratto di un corso d'acqua.

tificata adottando il modello di corrente, individuando cioè opportunamente una *direzione prevalente* del moto, in generale ad andamento curvilineo (figura 1.6). Definite quindi *sezioni* della corrente le intersezioni di essa con piani ortogonali alla linea coordinata x prescelta per rappresentare la direzione (detta longitudinale) della corrente, si fa riferimento a grandezze dinamiche (velocità, quantità di moto, energia, etc.) mediate nel piano della sezione. Tali grandezze forniscono una descrizione sintetica del moto sufficiente per gran parte degli scopi della tecnica. Esse risultano funzioni in generale delle sole coordinate spaziale x e temporale t .

Si pone dunque il problema di formulare i principi fondamentali della meccanica dei fluidi nell'ambito del modello di corrente.

Si noti che la scelta della linea coordinata x è in qualche misura arbitraria non potendo essere in generale riferita all'assetto tridimensionale della corrente, parte del quale (la superficie libera e il fondo se mobile) è a priori non noto.

Condizioni richieste perché l'adozione dello schema di corrente sia giustificato sono:

- la linea d'asse sia ovunque caratterizzata da curvature di flessione e torsione molto piccole, sicché i moti secondari, forzati nel piano della

sezione dallo squilibrio fra gradiente di pressione trasversale e forza centrifuga associata al moto curvilineo longitudinale, siano sufficientemente modesti da non contraddire l'esistenza di una 'direzione prevalente' del moto;

- le variazioni spazio-temporali della forma della sezione siano sufficientemente lente da non violare il vincolo della quasi-unidirezionalità del moto.

Sotto tali condizioni l'individuazione della 'direzione prevalente' del moto, e quindi dell'asse longitudinale, risulta relativamente semplice e il grado di arbitrarietà insito nella particolare scelta adottata influisce in misura trascurabile sulla soluzione.

b Trascurabilità della componente trasversale della velocità

Sia dunque x la *direzione prevalente* del moto. Un moto interpretabile attraverso lo schema di corrente è certamente un caso particolare di moto per il quale risulta adottabile lo schema bidimensionale. La condizione ulteriore imposta dall'esistenza di una direzione prevalente del moto può porsi nella forma:

$$\epsilon = \frac{b}{L} \ll 1 \quad (1.4.1)$$

avendo indicato con b la scala trasversale, su cui si manifestano cioè le variazioni trasversali delle proprietà caratteristiche del moto, ed L la scala delle variazioni longitudinali. L'equazione di continuità (1.3.24), insieme alla (1.4.1) consentono una stima dell'ordine di grandezza \tilde{V}_o della componente trasversale di velocità \tilde{V} (media sulla verticale). Se il moto è stazionario si ha:

$$\frac{\partial Y\tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial Y\tilde{V}}{\partial y} = 0 \quad (1.4.2)$$

donde

$$0 \left(\frac{Y_o U_o}{L} \right) \sim 0 \left(Y_o \frac{\tilde{V}_o}{b} \right)$$

cioè

$$\tilde{V}_o \sim 0(\epsilon U_o) \quad (1.4.3)$$

La (1.4.3) è semplicemente una riaffermazione dell'esistenza della direzione prevalente del moto x , poiché implica semplicemente che le linee di corrente

del moto (mediato sulla profondità) formano ovunque angoli di ordine ϵ , cioè piccoli, con la direzione x .

Se il moto è non stazionario occorre tener conto del contributo $\partial Y/\partial t$ nell'equazione di continuità. Il suo ordine di grandezza è Y_o/T se T è la scala temporale caratteristica del moto. Esso può indurre velocità trasversali al più tali che

$$0 \left(\frac{Y_o}{T} \right) = 0 \left(\frac{Y_o \tilde{V}_o}{b} \right) \quad (1.4.4)$$

Poiché il periodo caratteristico T risulta dell'ordine di molte ore o di giorni, sia nel caso delle onde di marea negli estuari sia per le onde di piena dei corsi d'acqua, ne consegue che la (1.4.4) dà luogo a stime per \tilde{V}_o persino inferiori alla (1.4.3). Nel seguito faremo dunque riferimento alla (1.4.3).

c Trascurabilità delle variazioni trasversali del carico piezometrico

Consideriamo, dunque, la (1.3.25) e assumiamo per semplicità assenza di vento. Gli ordini di grandezza dei vari termini sono riportati nell'espressione seguente:

$$0 \left(-g \frac{\partial h}{\partial y} \right) \sim 0 \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} + r_f \tilde{V} \frac{\sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2}}{Y} \right) \quad (1.4.5)$$

$$\left(\epsilon \frac{U_o}{T} \right) \left(\epsilon \frac{U_o^2}{L} \right) \left(\epsilon^2 \frac{U_o^2}{Y_o} \right) \left(r_{fo} \quad \frac{\epsilon U_o^2}{Y_o} \right)$$

Si noti che valori caratteristici del coefficiente di resistenza r_{fo} si aggirano intorno a $10^{-2} \div 10^{-3}$. Si può quindi ritenere che l'ordine di grandezza dell'ultimo termine della (1.4.5) non ecceda in genere $\epsilon U_o^2/L$. Poiché inoltre risulta in genere $1/T < U_o/L$ sia per propagazioni mareali che per propagazioni di onde di piena, segue:

$$0 \left(-g \frac{\partial h}{\partial y} \right) \sim 0 \left(\frac{1}{L}, \frac{r_{fo}}{Y_o} \right) \epsilon U_o^2 \quad (1.4.6)$$

Poiché emerge immediatamente dalla (1.3.24) che si ha

$$0 \left(-g \frac{\partial h}{\partial x} \right) \sim 0 \left(\frac{1}{L}, \frac{r_{fo}}{Y_o} \right) U_o^2 \quad (1.4.7)$$

sulla base di considerazioni analoghe a quelle che hanno consentito la stima (1.4.6), se ne conclude che la (1.3.25) conduce alla seguente conclusione:

$$\frac{\partial h}{\partial y} \ll \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.4.8)$$

In prima approssimazione risulta cioè lecito trascurare le variazioni trasversali di carico piezometrico e assumere quindi la *superficie libera orizzontale nella direzione trasversale*.

d Integrazione dell'equazione longitudinale nella direzione trasversale

Consideriamo, infine, la (1.3.24) che riscriviamo nella forma (1.3.14), trascurando i termini che coinvolgono i valori medi \tilde{T}_{xx} , \tilde{T}_{xy} e tenendo conto dei termini dispersivi attraverso coefficienti correttivi β_1 e β_2 definiti nella forma:

$$\int_{\eta}^h (U - \tilde{U})^2 dz = (\beta_1 - 1) \tilde{U}^2 \quad (1.4.9)$$

$$\int_{\eta}^h (U - \tilde{U})(V - \tilde{V}) dz = (\beta_2 - 1) \tilde{U} \tilde{V} \quad (1.4.10)$$

La (1.3.14) diventa dunque:

$$\frac{\partial(Y\tilde{U})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\beta_1 \tilde{U}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\beta_2 \tilde{U} \tilde{V}) = -gY \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{t_x^s}{\rho} + \frac{t_x^f}{\rho} \quad (1.4.11)$$

Eseguiamo l'integrazione della (1.4.11) coordinata trasversale con i limiti di integrazione evidenti dalla figura 1.2.

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-b_1}^{b_2} U \tilde{U} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b_1}^{b_2} \beta_1 Y \tilde{U}^2 dy - \left[Y \tilde{U} \frac{\partial b_2}{\partial t} + \beta_1 Y \tilde{U}^2 \frac{\partial b_2}{\partial x} + \beta_2 Y \tilde{U} \tilde{V} \right]_{y=b_2} + \\ - \left[Y \tilde{U} \frac{\partial b_1}{\partial t} + \beta_1 Y \tilde{U}^2 \frac{\partial b_1}{\partial x} + \beta_2 Y \tilde{U} \tilde{V} \right]_{y=b_1} \quad (1.4.12)$$

Ma

$$(Y)_{y=-b_1} = (Y)_{y=b_2} = 0 \quad (1.4.13)$$

e inoltre

$$\int_{-b_1}^{b_2} Y \tilde{U} dy = Q(x, t) = \bar{U} \Omega \quad (1.4.14)$$

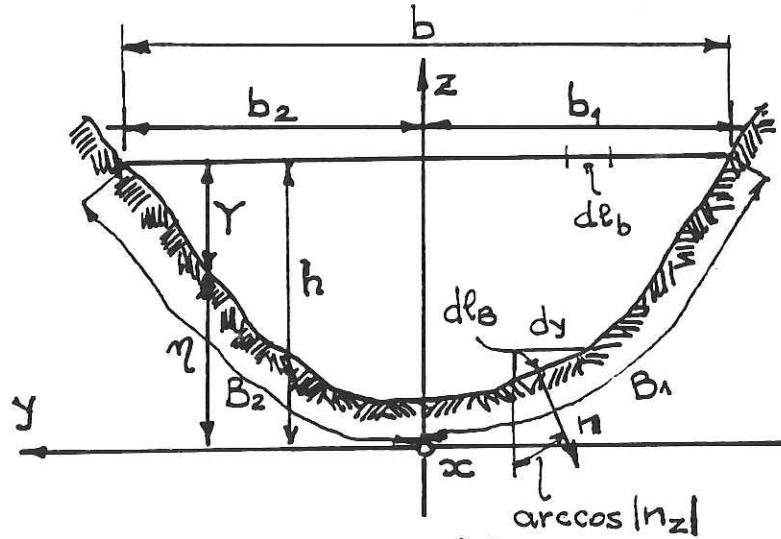


Figura 1.7:

avendo indicato con $Q(x, t)$ la portata volumetrica della corrente, con \bar{U} la velocità longitudinale mediata nella sezione e con Ω l'area della sezione.

Definito l'impulso della corrente in funzione dell'impulso di una corrente uniforme, con velocità \bar{U} e area della sezione Ω , attraverso un coefficiente correttivo β nella forma

$$\int_{-b_1}^{b_2} \beta_1 Y \bar{U}^2 dy = \int_{-b_1}^{b_2} \left[\int_{\eta}^h U^2 dz \right] dy = \beta \bar{U}^2 \Omega \quad (1.4.15)$$

si ottiene infine:

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{U} \Omega) + \frac{\partial}{\partial x} (\beta \bar{U}^2 \Omega) \quad (1.4.16)$$

Consideriamo ora la media dei termini nelle tensioni $t_x^{(s)}$ e $t_x^{(f)}$. Ricordando la (1.3.9c) e le (1.3.10a,b) ed osservando che $[dy/|n_z|_h]$ e $[dy/|n_z|_\eta]$ coincidono rispettivamente con dl_b e dl_B , essendo l_b l'elemento lineare del contorno della superficie libera ed l_B l'elemento lineare del contorno bagnato B della sezione (vedi figura 1.7) si può scrivere:

$$\int_{-b_1}^{b_2} \left(\frac{t_x}{|n_z|} \right)_{z=\eta} dy = \int_{-B_1}^{B_2} t_x dl_B = B \bar{\tau}^f \quad (1.4.17a)$$

$$\int_{-b_1}^{b_2} \left(\frac{t_x}{|n_z|} \right)_{z=h} dy = \int_{-b_1}^{b_2} t_x dl_b = b \bar{\tau}^s \quad (1.4.17b)$$

essendo $\overline{\tau^f}$ e $\overline{\tau^s}$ i valori medi delle tensioni tangenziali agenti sul contorno bagnato e sulla superficie libera rispettivamente.

Mediando infine, il termine gravitazionale della (1.4.11) si ottiene infine

$$I_3 = -g \int_{-b_1}^{b_2} Y \frac{\partial h}{\partial x} dy = -g\Omega \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.4.18)$$

Le (1.4.16-18) forniscono infine

$$\frac{\partial}{\partial t}(U\Omega) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta U^2\Omega) = -g\Omega \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} [B\tau_o^f - b\overline{\tau^3}] \quad (1.4.19)$$

avendo indicato con τ_o^f il modulo di $\overline{\tau^f}$.

La (1.4.19) è dovuta a Barrè de St. Venant (1871)¹.

e Integrazione dell'equazione di continuità

Integrando nella direzione trasversale l'equazione di continuità del modello 2-D si trova poi facilmente

$$\int_{-b_1}^{b_2} \frac{\partial Y}{\partial t} dy + \int_{-b_1}^{b_2} \frac{\partial(Y\tilde{U})}{\partial x} dy + \int_{-b_1}^{b_2} \frac{\partial(Y\tilde{V})}{\partial y} dy = 0 \quad (1.4.20)$$

o

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.4.21)$$

f Forma alternativa dell'equazione di De Saint-Venant

Sostituendo la (1.4.21) nella (1.4.19) e dividendo ambo i membri per Ω si trova:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \beta U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{U}{\Omega} \frac{\partial(\beta - 1)Q}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_o^f}{\rho R_i} + \frac{b}{\rho \Omega} \overline{\tau^s} \quad (1.4.22)$$

con R_i raggio idraulico della sezione definito come rapporto Ω/B . In molte circostanze che verranno discusse nel seguito il coefficiente correttivo β assume valori molto prossimi ad 1. In tal caso posto $\beta = 1$ la (1.4.22) assume la forma semplificata

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_o^f}{\rho R_i} + \frac{b}{\rho \Omega} \overline{\tau^s} \quad (1.4.23)$$

¹De Saint Venant, B. (1871). Comptes Rendus de L'Acad. des Sciences, nn. 3, 4.

1.5 Il modello zero-dimensionale

Se l'operazione di media spaziale si estende alla terza direzione, quella longitudinale, si perviene a un modello che non contiene alcuna variabile spaziale bensì solo la variabile temporale: in questo senso esso viene denominato zero-dimensionale. Esso equivale ad assumere che la superficie libera del corpo idrico esaminato mantenga assetto orizzontale pur variandone la quota nel tempo.

Integrando la (1.4.21) fra una sezione di ingresso x_i e una sezione di uscita x_u , e dette $Q_i(t)$ e $Q_u(t)$ le corrispondenti portate, si ottiene

$$\int_{x_i}^{x_u} \frac{\partial \Omega}{\partial t} dx + Q_u(t) - Q_i(t) = 0 \quad (1.5.1)$$

donde

$$Q_i(t) - Q_u(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_i}^{x_u} \Omega dx = \frac{dV}{dt} \quad (1.5.2)$$

essendo V il volume liquido istantaneamente compreso fra le sezioni di ingresso e di uscita del corpo idrico in esame. Posto $dV = [S(h)dh]$, con $S(h)$ area della superficie libera compresa fra le sezioni x_i e x_u all'istante t in cui è $h(t)$ la sua quota rispetto a un riferimento orizzontale, segue la forma zero-dimensionale dell'equazione di continuità:

$$Q_i(t) - Q_u(t) = S(h) \frac{dh}{dt} \quad (1.5.3)$$

La (1.5.3) presenta numerose applicazioni in particolare nei problemi di regolazione dei serbatoi e nelle stime approssimate dell'effetto di regolazione di bocche lagunari sull'andamento dei livelli idrici all'interno di bacini lagunari (metodo statico). Alla stessa nozione possono poi ridursi concettualmente metodi in largo uso nella pratica ingegneristica per il calcolo delle reti di bonifica o di fognatura (metodo del volume d'invaso o metodo italiano) o per il calcolo approssimato delle portate di piena lungo i corsi d'acqua.

Si noti che la (1.4.19) si riduce qui a un'identità: se dh/dx risulta così piccolo da essere posto nullo segue infatti l'annullarsi di U e τ^f .

La (1.5.3) deve invece essere associata a relazioni che forniscono la dipendenza di Q_i e Q_u dal tempo. Tali relazioni possono essere note in forma esplicita o in forma implicita attraverso la dipendenza che Q_i e Q_u possono presentare dal livello h della superficie libera del bacino. È quest'ultimo il caso delle bocche lagunari in cui la portata in ingresso o in uscita potrà porsi nella forma caratteristica delle luci a stramazzo rigurgitate dipendendo dalla differenza di carico mare-bacino.

1.6 Considerazioni conclusive sulla formulazione dei problemi del moto nell'ambito dei diversi modelli

a Premessa

Le equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto derivate nell'ambito dei diversi modelli non esauriscono naturalmente la formulazione matematica dei relativi problemi del moto. È necessario associare ad esse opportune condizioni al contorno. La scelta di queste ultime non è sempre ovvia e richiede anzitutto la precisazione della natura matematica del sistema di equazioni differenziali di bilancio. Rinviamo ai capitoli successivi tali formulazioni, di cui è rilevante analizzare gli aspetti fenomenologici nell'ambito di ciascuno dei contesti applicativi che verranno esaminati nel seguito.

È opportuno tuttavia che il lettore si doti di qualche strumento matematico che si rivelerà necessario a tali analisi. Il paragrafo che segue risponde a tale esigenza.

b Nozioni generali sui sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine in due variabili dipendenti

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali quasi lineari del I ordine in due variabili indipendenti x e t . Dette $f_j (j = 1, \dots, n)$ le variabili dipendenti, tale sistema si scrive

$$a_{ij} f_{j,t} + b_{ij} f_{j,x} + c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6.1)$$

con a_{ij} , b_{ij} e c_i funzioni delle f_1, f_2, \dots, f_n oltre che di x e t .

Il carattere di quasi linearità del sistema (1.6.1) è legato al fatto che le funzioni a_{ij} e b_{ij} possono dipendere dalle variabili dipendenti ma non dalle loro derivate. Le (1.6.1) possono interpretarsi come relazioni che forniscono informazioni sulle variazioni delle diverse funzioni f_j in diverse direzioni del piano (x, t) che denomineremo nel seguito piano orario. Ci poniamo ora il problema di verificare se, attraverso combinazioni lineari delle (1.6.1), non sia possibile ricavare informazioni sulle variazioni di tutte le f_j in una sola direzione del piano orario. A questo scopo consideriamo una generica combinazione lineare delle (1.6.1) del tipo

$$l_i (a_{ij} f_{j,t} + b_{ij} f_{j,x} + c_i) = 0 \quad (1.6.2)$$

dove il vettore l è funzione di x, t e f .

Se si ha

$$l_i a_{ij} = m_j \frac{dT}{d\eta} \quad l_i b_{ij} = m_j \frac{dX}{d\eta} \quad (1.6.3a, b)$$

con η parametro che definisce la curva del piano orario

$$x = X(\eta) \quad t = T(\eta) \quad (1.6.4a, b)$$

la (1.6.2) diventa

$$m_j \frac{df_j}{d\eta} + l_j c_j = 0 \quad (1.6.5)$$

con $df_j/d\eta$ derivata totale eseguita lungo la curva predetta. La (1.6.5) realizza il proposito enunciato di ottenere informazioni complessive su tutte le funzioni f_j lungo una singola direzione. Eliminando m_j fra le (1.6.3a,b) si ottiene:

$$l_i \left(a_{ij} \frac{dX}{d\eta} - b_{ij} \frac{dT}{d\eta} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6.6)$$

Le (1.6.6) costituiscono un sistema omogeneo lineare nelle n incognite l_i la cui condizione di compatibilità si scrive:

$$\left| a_{ij} \frac{dX}{d\eta} - b_{ij} \frac{dT}{d\eta} \right| = 0 \quad (1.6.7)$$

La (1.6.7) definisce una relazione per le curve del piano orario $(x, t) = (X(\eta), T(\eta))$, che si dicono linee caratteristiche, mentre la (1.6.5) costituisce l'equazione detta in forma caratteristica.

Poiché ciascuna equazione nella forma caratteristica fornisce solo una relazione fra le n derivate di f_j lungo la corrispondente curva caratteristica è evidente che, al fine di poter 'costruire' la soluzione nell'immediato intorno di un punto del piano orario, è necessario che siano note n equazioni indipendenti nella forma caratteristica. Quando la loro individuazione è possibile il sistema è detto iperbolico. Tale circostanza corrisponde poi a un fatto fisico elementare: nei fenomeni propagatori il comportamento del fenomeno in un punto, in un certo intervallo di tempo, è influenzato solo da quei punti circostanti sufficientemente prossimi affinché le 'onde' da loro provenienti siano in grado di raggiungerlo nel dato intervallo.

Definiamo dunque:

un sistema differenziale del tipo (1.6.1) è iperbolico se è possibile determinare n vettori linearmente indipendenti e reali l^k ($k = 1, \dots, n$) tali che

$$l_i^k (a_{ij} \alpha^k + b_{ij} \beta^k) = 0 \quad (1.6.8)$$

per ogni k , con α^k e β^k reali e tali che $(\alpha^k)^2 + (\beta^k)^2 \neq 0$.

Si noti che il carattere iperbolico del sistema non richiede che le coppie (α^k, β^k) che definiscono le curve caratteristiche siano fra loro distinte.

c Una particolare classe di sistemi di equazioni quasi-lineari del primo ordine

È di interesse esaminare il caso particolare in cui il sistema differenziale (1.6.1) si presenta nella forma

$$f_{i,t} + A_{ij}f_{j,x} + B_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6.9)$$

con A_{ij} funzione di f_k ($k = 1, 2, 3$), x e t .

La (1.6.1), peraltro, se moltiplicata per a_{ij}^{-1} (dopo un'eventuale trasformazione di coordinate se la matrice a_{ij} fosse singolare) e riducibile alla (1.6.9).

In tal caso, utilizzando t stesso come parametro in luogo di η , si trova che la combinazione lineare

$$l_i(f_{i,t} + A_{ij}f_{j,x} + B_i) = 0 \quad (1.6.10)$$

assume la forma caratteristica

$$l_i \frac{df_i}{dt} + l_i B_i = 0 \quad (1.6.11)$$

posto che

$$\frac{dx}{dt} = c \quad (1.6.12)$$

$$l_i(\delta_{ij}c - A_{ij}) = 0 \quad (1.6.13)$$

Dunque le curve caratteristiche sono curve del piano orario definite dal parametro c attraverso la (1.6.13) con c autovalore della matrice A_{ij} , radice dell'equazione

$$|A_{ij} - \delta_{ij}c| = 0 \quad (1.6.14)$$

Nell'algebra lineare si dimostrano i seguenti teoremi:

1. gli autovettori l corrispondenti ad autovalori c distinti sono linearmente indipendenti: dunque il sistema (1.6.9) risulta iperbolico se la (1.6.14) presenta n radici distinte;

2. se A_{ij} è una matrice reale e simmetrica, le radici della (1.6.14) sono reali ed è possibile determinare n autovettori reali indipendenti: il sistema (1.6.9) è dunque iperbolico se la matrice A è reale e simmetrica.

Si può verificare il caso in cui le matrici a_{ij} (o b_{ij}) della (1.6.1) o A_{ij} della (1.6.9) risultino singolari. Ciò accade se gli assi x e t sono due caratteristiche: in tal caso una semplice rotazione di assi conduce a un nuovo sistema caratterizzato da matrici non singolari. Può infine verificarsi che queste ultime si mantengano singolari per qualsiasi rotazione di assi: in tal caso il sistema differenziale originario è degenere, cioè di grado superiore al necessario, e quindi riducibile a un sistema di ordine inferiore non degenere.

Capitolo 2

CORRENTI UNIFORMI E STAZIONARIE A SUPERFICIE LIBERA

2.1 Condizioni per il verificarsi di un moto stazionario uniforme

Un moto (in particolare a superficie libera) si definisce stazionario uniforme se è unidirezionale (strettamente o mediamente) e le sue caratteristiche (istantanee se il moto è laminare, medie nel tempo se, come nei casi tecnicamente significativi, il moto è turbolento) risultano indipendenti dal tempo e dalla coordinata spaziale che individua la direzione del moto.

Condizioni necessarie per il verificarsi di un assetto stazionario uniforme del moto sono:

- i) la sua geometria, cioè la conformazione dell'alveo, sia cilindrica, la generica direttrice del cilindro costituendo il contorno solido della sezione e le generatrici essendo parallele alla direzione del moto;
- ii) il moto risulti pienamente sviluppato, cioè l'influenza delle condizioni di estremità di monte e/o di valle non si risenta nel tronco considerato;
- iii) le condizioni in corrispondenza delle sezioni di estremità siano stazionarie.

Tali condizioni si ritrovano verificate rigorosamente nel moto di liquidi in canali artificiali ad andamento rettilineo e sezione costante a sufficiente distanza dall'imbocco, dallo sbocco e da eventuali variazioni di geometria della sezione. In modo approssimato le predette condizioni sono soddisfatte talvolta anche nel moto di corsi d'acqua naturali in tronchi quasi-cilindrici.

Assumeremo nel seguito l'alveo cilindrico e il moto pienamente sviluppato.

La cilindricità dell'alveo consente di definire una pendenza del fondo i_f , come pendenza delle generatrici del cilindro costituente l'alveo. Consente inoltre di definire in modo univoco le *sezioni* del moto quali intersezioni del corpo idrico con piani ortogonali alla direzione del moto. Quest'ultima sarà individuata da una coordinata longitudinale x definita per esempio rispetto a un asse coincidente con la generatrice di fondo.

2.2 Moti stazionari e uniformi di correnti

a Sezione di una corrente uniforme e sue proprietà

Il modello di *corrente* è stato introdotto nel capitolo precedente e riconduce, come si è visto, la descrizione del moto a una forma uni-dimensionale in cui le caratteristiche del deflusso vengono riguardate come funzioni al più del tempo t e della coordinata longitudinale x . Tali caratteristiche interpretano *in media* la struttura del campo di moto nelle sezioni della corrente, fornendone così una interpretazione sintetica spesso sufficiente corrisponde alle esigenze della tecnica. Introduciamo alcune definizioni che precisano i termini di tale interpretazione.

La geometria della sezione è caratterizzata dalla larghezza della superficie libera b , l'area della sezione Ω , il contorno bagnato B , la profondità Y , intesa come distanza misurata fra la superficie libera e la linea di fondo dell'alveo, quest'ultima caratterizzata da quota $z_f(x)$ rispetto a un generico riferimento orizzontale.

Le grandezze b , Ω , B e Y , in generale funzioni della coordinata longitudinale x e del tempo t , per una corrente a superficie libera in moto stazionario uniforme risultano costanti.

Altresì costante nel tempo, ma non in x , risulta il carico piezometrico definito nella forma

$$h = z_f + Y \cos \theta \quad (2.2.1)$$

essendo θ l'angolo che l'orizzontale forma con l'asse x .

La definizione (2.2.1) è spesso semplificata nell'ipotesi che la pendenza i_f del fondo sia sufficientemente modesta da poterla confondere con $\sin(\theta)$ e porre $\cos(\theta) \simeq 1$. Segue in tal caso che $Y/\cos(\theta) \simeq Y \cos(\theta) \simeq Y$ donde le

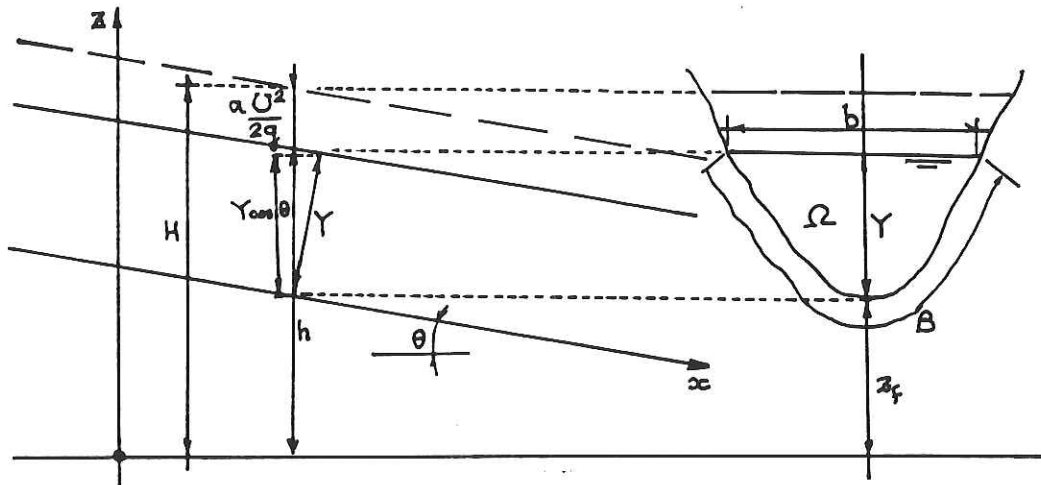


Figura 2.1: Moto uniforme di correnti: notazioni.

sezioni della corrente possono confondersi con le intersezioni della stessa con piani verticali e inoltre

$$h \cong z_f + Y \quad (2.2.2)$$

La condizione di stazionarietà e uniformità del moto implica la costanza di Y e un andamento lineare della funzione $z_f(x)$ donde

$$i \equiv -\frac{dh}{dx} = i_f = \text{costante} \quad (2.2.3)$$

Se denominiamo *linea dei carichi piezometrici (effettivi)* della corrente la linea tracciata nel piano (x, z) e tale che la sua distanza dal piano orizzontale di riferimento misuri a ogni ascissa x il carico piezometrico (effettivo) caratteristico della corrispondente sezione della corrente, le considerazioni precedenti consentono di concludere che:

La linea dei carichi piezometrici nei moti stazionari uniformi a superficie libera risulta parallela alla linea di fondo e coincide con la linea del pelo libero intesa come intersezione della superficie libera col piano verticale xz .

Si noti come sia la costanza del carico piezometrico nella sezione, conseguenza dell'accettabilità dello schema interpretativo uni-dimensionale, a conferire significato alla nozione di *linea dei carichi piezometrici*.

b Linea dei carichi effettivi

Definiamo infine il *carico effettivo o totale* H nella generica sezione della corrente ponendo

$$H = h + \alpha \frac{U^2}{2g} \quad (2.2.4)$$

avendo indicato con α il rapporto fra la media nella sezione delle altezze cinetiche locali e l'altezza cinetica associata alla velocità media.

L'equazione di continuità del modello 1-D, dato il carattere stazionario dei moti qui considerati, implica la costanza della portata Q della corrente, ovviamente nel tempo e nello spazio. Tale condizione, insieme a quella di cilindricità del moto, implica la costanza della velocità media U . Le (2.2.3) e (2.2.4) pongono allora:

$$j \equiv -\frac{dH}{dx} = i_f = \text{costante} \quad (2.2.5)$$

Dunque:

La linea dei carichi effettivi risulta parallela alla linea di fondo e quindi anche alla linea dei carichi piezometrici, distando da quest'ultima della media delle altezze cinetiche nella sezione $\alpha(U^2/2g)$.

Poiché il carico effettivo H rappresenta l'energia meccanica specifica (riferita all'unità di peso) della corrente, la (2.2.5) esprime semplicemente la considerazione che tale quantità va diminuendo in modo lineare lungo la direzione longitudinale esattamente nella misura imposta dal progressivo ridursi dell'energia potenziale di posizione della corrente stessa. L'uniforme e stazionario carattere del moto impone infatti la costanza dell'altezza cinetica media e di pressione lungo la direzione longitudinale.

c L'equazione del moto uniforme nella forma di Chèzy

L'equazione del moto del modello 1-D, la (1.4.20), si riduce nel caso stazionario uniforme, e in assenza di vento alla relazione:

$$\tau_o^f = -\rho g \frac{dh}{dx} R_i = \rho g R_i i_f \quad (2.2.6)$$

con $R_i = \Omega/B$ raggio idraulico.

La (2.2.6) può considerarsi quale equazione del moto uniforme. Essa viene però espressa in generale in funzione di un *coefficiente di conduttanza* medio per la sezione C ponendo

$$\tau_o^f = \frac{\rho U^2}{C^2} \quad (2.2.7)$$

donde

$$U = C \sqrt{g R_i i_f} \quad (2.2.8)$$

La (2.2.8) è la forma adimensionale di una relazione originariamente proposta da Chèzy¹ precisamente

$$U = \chi \sqrt{R_i i_f} \quad (2.2.9)$$

Si noti inoltre che la (2.2.8) è equivalente alla espressione utilizzata nel moto uniforme delle correnti in pressione

$$i = \frac{\lambda}{4R_i} \frac{U^2}{2g} \quad (2.2.10)$$

con la seguente relazione fra coefficiente d'attrito λ e conduttanza C

$$C = \frac{\chi}{\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \quad (2.2.11)$$

Si osservi come i coefficienti C e χ rappresentino *coefficienti conduttanza* piuttosto che di *resistenza* come sono spesso denominati nella letteratura.

L'uso della (2.2.8) rimanda alla conoscenza della struttura della funzione C , ovviamente non determinabile nell'ambito del modello 1-D. Essa richiede la conoscenza della distribuzione della velocità (media nel tempo) U nella sezione, cioè ai risultati ottenuti a partire dal modello 3-D del moto in esame. Nota U la (2.2.7) porge

$$C = \frac{U}{u_*} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{u}{u_*} d\Omega \quad (2.2.12)$$

con $\overline{u_*}$ velocità d'attrito media sul contorno bagnato.

¹Chèzy, A., Mouret, G. (1925). "Ann. des ponts et chaussées".

2.3 Valutazione del coefficiente di conduttanza C per sezioni di forma regolare

a Distribuzione di velocità

La distribuzione di velocità in un moto turbolento mediamente unidirezionale in un condotto circolare può porsi nella forma

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln \left(\frac{zu_*}{\nu} \right) + 5.5 \quad (\text{regime liscio}) \quad (2.3.1)$$

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln \left(\frac{z}{\epsilon} \right) + 8.5 \quad (\text{regime scabro}) \quad (2.3.2)$$

con $u_* \equiv \sqrt{\tau_x^f / \rho}$, ϵ scabrezza assoluta equivalente e z distanza della parete. Tale distribuzione può assumersi valida lungo la normale alla parete in una sezione qualsiasi con u_* variabile lungo il contorno bagnato.

Esaminiamo anzitutto il caso di un canale a sezione rettangolare infinitamente larga. In tal caso u_* risulta costante sicché la (2.2.12) con le (2.3.1) e (2.3.2) porge

$$C = 2.5 \ln \left(\frac{R_e}{C} \right) + B_l \quad (\text{regime liscio}) \quad (2.3.3)$$

$$C = 2.5 \ln \left(\frac{R_i}{C} \right) + B_r \quad (\text{regime scabro}) \quad (2.3.4)$$

con

$$R_e \equiv \frac{4R_i U}{\nu} \quad R_i = Y \quad (2.3.5a, b)$$

Le costanti B_l e B_r assumerebbero i valori a -4.7 e 6.0 se le distribuzioni (2.3.1) e (2.3.2) risultassero effettivamente valide in tutta la sezione. Il cosiddetto *effetto di scia* conduce a modeste variazioni.

Sperimentalmente per la sezione circolare, si trova

$$B_l = 0 \quad B_r = 6.46$$

Per sezioni di forma diversa dalla circolare si usa riferirsi al caso della sezione circolare introducendo un coefficiente di forma f . Dunque:

$$C = 2.5 \ln \left(\frac{f R_e}{C} \right) + B_l = 2.5 \ln \left(\frac{f R_e}{C} \right) \quad (\text{regime liscio}) \quad (2.3.6)$$

$$C = 2.5 \ln \left(\frac{f R_e}{\epsilon} \right) + B_r = 2.5 \ln \left(\frac{13.3 R_i f}{C} \right) \quad (\text{regime scabro}) \quad (2.3.7)$$

Per sezioni rettangolari molto larghe si trova:

$$f = 0.824 \quad (2.3.8)$$

Per sezioni di forma diversa dalla rettangolare molto larga l'effetto della forma si risente anche attraverso variazioni di u_* lungo il contorno. Le (2.3.1) e (2.3.2) possono porsi in generale nella forma

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln \left(\frac{y \bar{u}_*}{\nu} \right) + b_l \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) \quad (2.3.9)$$

$$\frac{U}{u_*} = 2.5 \ln \left(\frac{y}{\epsilon} \right) + b_r \left(\frac{u_*}{\bar{u}_*} \right) \quad (2.3.10)$$

con y distanza dalla parete più vicina, \bar{u}_* velocità d'attrito media sul contorno bagnato, b_l e b_r funzioni variabili lungo il contorno. Si noti tuttavia che la pendenza delle (2.3.9)-(2.3.10) risulta indipendente dalla forma della sezione come suggerito dai rilievi sperimentali di velocità.

b La formula di Marchi per sezioni di forma regolare

Marchi (1961)² ha mostrato come, partendo da una distribuzione logaritmica della velocità lungo le normali al contorno, si perviene a una legge di resistenza di tipo logaritmico analoga alla formula di Colebrook ma comprensiva anche dell'effetto della forma della sezione, attraverso l'introduzione di un coefficiente di forma secondo la relazione:

$$C = -2.5 \ln \left(\frac{C}{R_e f} + \frac{\epsilon}{13.3 R_e f} \right) \quad (2.3.11)$$

con i valori di f per i canali riportati nella tabella 2.1.

c Le formule empiriche per canali scabri

La valutazione di C per canali scabri, cioè quando il deflusso della corrente avviene in regime assolutamente turbolento, può effettuarsi anche utilizzando formule empiriche ancora largamente utilizzate nella pratica professionale. Fra di esse le più utilizzate sono le seguenti: (Gauckler³, 1868; Strickler⁴,

²Marchi, E. (1961). L'Energia Elettrica, 38, nn. 4,5.

³Gauckler, P. (1868). Ann. des ponts et chaussées, vol. 15, sez. 4.

⁴Strickler, A. (1923). Mittelungen des eidgenossischen amtes fur Wasserwirtschaft, n. 16, Bern.

Forma sezione	f
Triangolare equilatera	1.3÷1.25
Triangolare retta	1.2-1.15
Semicircolare	0.9
Semiesagonale	1.0÷0.9
Trapezia molto larga	0.8
Rettangolare	0.95
Rettangolare molto larga	0.8

Tabella 2.1:

1923); (Bazin⁵, 1865); (Ganguillet & Kutter⁶, 1869):

$$\chi = k_s R_i^{1/6} \quad (2.3.12)$$

$$\chi = \frac{87}{1 + \gamma_B / \sqrt{R_i}} \quad (2.3.13)$$

$$\chi = \frac{100}{1 + m_k / \sqrt{R_i}} \quad (2.3.14)$$

I parametri k_s, γ_B, m_k sono parametri di scabrezza le cui dimensioni sono, rispettivamente, $L^{1/3}T^{-1}, L^{1/2}$ e $L^{1/2}$. Valori tipici di tali parametri sono riportati nella tabella 2.2 dove vengono messi a confronto con i rispettivi valori del parametro di scabrezza ϵ utilizzato nelle formule logaritmiche.

2.4 Problema di progetto

Le nozioni presentate nei punti precedenti consentono di formulare e risolvere il problema di progetto di un canale.

Gli elementi che vanno considerati come dati assegnati sono:

- la pendenza, in genere imposta dall'altimetria del terreno;
- la portata che si intende far defluire;

⁵Bazin, H. (1865). Mèm. pres. div. savants à l'Acad. des Sciences, vol. 19.

⁶Ganguillet, E., Kutter, W.R. (1869). Zeit d. osterreichischer Ing.-und Architekten Vereines, vol. 21, nn. 1,2,3, Wien.

– la natura e la forma dell'alveo.

Resta incognita la profondità di moto uniforme Y_u . La (2.2.8), posta nella forma

$$\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = C\Omega\sqrt{gR_i} \quad (2.4.1)$$

può considerarsi un'equazione implicita per l'incognita Y_u di cui C , Ω ed R_i sono funzioni note. La (2.4.1) può risolversi per tentativi.

Si noti che la (2.4.1) diventa esplicita in Y_u se la sezione è rettangolare molto larga ($R_i \simeq Y_u$) e se si adotta una formula monomia, quale quella di Manning-Gauckler-Strickler

$$C = \frac{k_s}{\sqrt{g}} f R_i^{1/6} \quad (2.4.2)$$

per la valutazione di C . In tal caso si ottiene

$$\frac{q}{\sqrt{i_f}} = k_s Y_u^{5/3} \quad (2.4.3)$$

con $q \equiv Q/b$ portata per unità di larghezza del canale.

2.5 Il caso degli alvei naturali

a Valutazione della conduttanza di alvei irregolari

Lo studio del moto nei corsi d'acqua naturali riguarda spesso sezioni trasversali di forma irregolare, costituite da porzioni caratterizzate da profondità e scabrezze relative sensibilmente diverse.

In particolare è frequente la necessità di distinguere fra un *letto di magra* più profondo e localizzato nella parte centrale della sezione e aree laterali dette *golene* delimitate spesso da argini maestri e destinate a contenere le portate di piena.

Poiché è spesso tecnicamente utile far riferimento al modello 1-D si pone il problema di come tener conto in modo complessivo della disuniforme distribuzione delle caratteristiche geometriche della sezione e delle caratteristiche del moto.

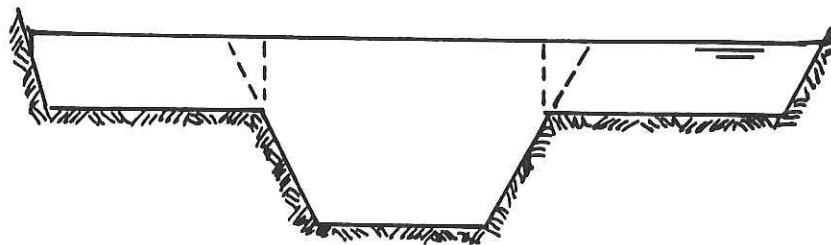


Figura 2.2: Schema di sezione composita.

Un primo procedimento può essere quello di suddividere la sezione in porzioni distinte caratterizzate da velocità medie diverse ma pendenza costante del fondo. Nel caso in figura 2.2 la suddivisione può essere operata attraverso linee verticali od oblique.

In quest'ultimo caso la porzione centrale è costituita da una sezione trapezia. Si noti che il raggio idraulico è per ciascuna sezione determinato dalla porzione di contorno solido in essa presente. Alle diverse porzioni della sezione si applicano quindi le considerazioni note per il calcolo del moto uniforme. Per esempio, per valutare la portata complessiva per assegnata posizione del pelo libero si sommano i relativi contributi di portata di ciascuna porzione.

Nel caso più generale di geometria e scabrezza irregolarmente distribuite si può fare riferimento a un procedimento proposto da Engelund (1964)⁷ che costituisce sostanzialmente una generalizzazione del procedimento precedente.

La sezione è suddivisa in strisce verticali adiacenti caratterizzate da profondità e coefficienti di scabrezza diversi. A ciascuna striscia si applicano poi le considerazioni note per il calcolo del moto uniforme, nell'ipotesi che la superficie libera si mantenga orizzontale. È implicita in tale metodo l'ipotesi che la struttura della turbolenza di parete lungo la verticale non differisca molto da quella che si realizza lungo la normale: tale ipotesi è evidentemente sempre più valida quanto più *larga* è la sezione.

Si determinano allora *valori efficaci* del raggio idraulico o del coefficiente di conduttanza della sezione imponendo che la tensione totale agente sul contorno bagnato si ottenga integrando nella direzione trasversale la tensione locale associata a ciascuna striscia di moto uniforme. Dunque, posto

⁷Engelund, F. (1964). Tech. Univ. Denmark, Basic Research Report n. 6.

localmente

$$|\tau_x^f| = \rho g i_f \frac{d\Omega}{dB} \quad (2.5.1)$$

segue

$$\rho g \Omega i_f = \frac{\Omega}{R_i} \overline{\tau_o^f} = \int_B |\tau_x^f| dB \quad (2.5.2)$$

D'altra parte la (2.2.7) pone

$$\overline{\tau_o^f} = \frac{\rho}{\bar{C}^2} U^2 \quad (2.5.3)$$

avendo indicato con \bar{C} il coefficiente di conduttanza 'efficace' per l'intera sezione.

Ma, detto $C(y)$ il valore locale del coefficiente di conduttanza, segue, dalle (2.2.7) e (2.5.1),

$$\tilde{U} = C(y) [g i_f Y(y)]^{1/2} \quad (2.5.4)$$

e quindi

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{-b_1}^{b_2} Y \tilde{U} dy = \frac{\sqrt{i_f g}}{\Omega} \int_{-b_1}^{b_2} C(y) Y^{3/2}(y) dy \quad (2.5.5)$$

donde

$$\frac{\rho g}{\bar{C}^2} i_f \left[\frac{1}{\Omega} \int_{-b_1}^{b_2} C(y) Y^{3/2}(y) dy \right]^2 = \rho g R_i i_f \quad (2.5.6)$$

e quindi

$$\bar{C} = \left\{ \frac{1}{\Omega R_i^{1/2}} \int_{-b_1}^{b_2} C(y) Y^{3/2}(y) dy \right\} \quad (2.5.7)$$

Risolta in termini di R_i la (2.5.10) fornisce un'espressione per il raggio idraulico efficace della sezione.

b Valutazione dei coefficienti correttivi della quantità di moto e dell'energia cinetica

Nel caso di sezioni fortemente irregolari confondere i coefficienti α e β con l'unità non è approssimazione adeguata.

È opportuno anche in questo caso utilizzare un procedimento analogo a quello proposto da Engelund (1964) per la valutazione della conduttanza efficace.

Segue:

$$\beta = \frac{\int_{\Omega} U^2 d\Omega}{U^3 \Omega} = \frac{\int_{-b_1}^{b_2} Y \tilde{U}^2 dy}{U^2 \Omega} = \frac{\Omega \int_{-b_1}^{b_2} C^2(y) Y^2(y) dy}{\left[\int_{-b_1}^{b_2} C(y) Y^{3/2}(y) dy \right]^2} \quad (2.5.8)$$

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} U^3 d\Omega}{U^3 \Omega} = \frac{\int_{-b_1}^{b_2} Y \tilde{U}^3 dy}{U^3 \Omega} = \frac{\Omega^2 \int_{-b_1}^{b_2} C^3(y) Y^{3/2}(y) dy}{\left[\int_{-b_1}^{b_2} C(y) Y^{3/2}(y) dy \right]^3} \quad (2.5.9)$$

c Scala di deflusso

La condizione di moto uniforme e stazionario istituisce per ogni sezione di un corso d'acqua una relazione biunivoca fra portata Q e area della sezione Ω .

Istituendo empiricamente una relazione fra area della sezione e livello idrico ne consegue la possibilità di misurare la portata defluente in una sezione assegnata al variare della quota della superficie libera, ciò, si badi, nell'ipotesi che il deflusso avvenga in condizioni uniformi e stazionarie. È questo il procedimento tradizionale di misura della portata dei corsi d'acqua: la scala delle portate così istituita prende il nome di scala di deflusso. Essa può porsi nella forma

$$Q = K \Omega^m \quad (2.5.10)$$

con K ed m coefficienti di cui il primo è dipendente dalla scabrezza, pendenza del fondo e contorno bagnato, il secondo risulta praticamente dipendente solo dalla forma della sezione.

Posto infatti di usare la formula di Gauckler-Manning-Strickler si ha

$$Q = k_s i_f^{1/2} \Omega^{5/3} B^{-2/3} \quad (2.5.11)$$

donde, in un intorno di una configurazione caratterizzata da valori Q_o, Ω_o e B_o si può porre

$$Q = Q_o \left\{ 1 + \left[\frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{dB}{d\Omega} \right)_{\Omega_o} \frac{\Omega_o}{B_o} \right] \frac{d\Omega}{\Omega_o} \right\} \quad (2.5.12)$$

il che equivale a porre, in tale intorno:

$$m = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{dB}{d\Omega} \right)_{\Omega_o} \frac{\Omega_o}{B_o} \quad (2.5.13)$$

vel. pg 42

Scostamenti sensibili dal comportamento qui descritto si hanno se l'idrometro è installato in una sezione in cui, al variare della portata, si hanno apprezzabili scostamenti dalle condizioni stazionarie uniformi. Riprenderemo queste considerazioni nel capitolo che segue.

Esempi

$$\frac{dB}{d\Omega} = \frac{dB}{dY} \cdot \frac{dY}{d\Omega} = \frac{2}{b}$$

i) Il caso della sezione rettangolare ($B = b + 2Y, \Omega = bY$).

Si ha

$$m = \frac{5}{3} - \frac{\frac{dB}{d\Omega}}{\frac{dB}{dY}} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \frac{Y/b}{1 + 2Y/b}$$

donde

$$m \rightarrow \frac{5}{3} \quad \text{per } \frac{Y}{b} \rightarrow 0 \quad (\text{larga})$$

$$m \rightarrow 1 \quad \text{per } \frac{Y}{b} \rightarrow \infty \quad (\text{alta})$$

$$\begin{aligned} x \frac{Y}{b} &= 1/2 \\ m &= 4/3 \end{aligned}$$

Praticamente m si aggira fra $4/3$ e $5/3$ essendo $4/3$ il valore appropriato al caso $Y/b = 1/2$.

ii) Il caso della sezione triangolare, e per forme simili

Detta θ l'apertura si ha:

$$B = \frac{b}{\sin(\theta/2)} = \frac{2Y}{\cos(\theta/2)}$$

$$\Omega = \frac{bY}{2} = Y^2 \operatorname{tg}(\theta/2)$$

donde

$$m = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{dB}{dY} \frac{dY}{d\Omega} \frac{Y}{2} \sin(\theta/2) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \frac{2}{\cos(\theta/2)} \frac{1}{Y \operatorname{tg}(\theta/2)} \frac{Y}{4} \sin(\theta/2) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{dQ}{dN} = k_f \mu_f^{1/2} \left[\frac{5}{3} \frac{n^{2/3}}{B^{2/3}} - \frac{2}{3} \frac{n^{5/3}}{B^{5/3}} \frac{dB}{dN} \right]$$

$$m = \frac{Q_{in}}{e/n} = \frac{k_f \mu_f^{1/2} B^{2/3}}{k_f \mu_f^{1/2} n^{2/3}} \left[\frac{5}{3} \frac{n^{2/3}}{B^{2/3}} - \frac{2}{3} \frac{n^{5/3}}{B^{5/3}} B_{in} \right]$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \frac{n}{B} \frac{dB}{dN}$$

Capitolo 3

CORRENTI STAZIONARIE A SUPERFICIE LIBERA

Lo studio delle correnti stazionarie a superficie libera, fondato sul modello 1-D, è finalizzato principalmente al tracciamento dei cosiddetti *profili di rigurgito*, cioè dell'andamento della superficie libera in tronchi quasi-cilindrici del corso d'acqua.

Forniamo anzitutto alcune definizioni generali relative a correnti in alvei

3.1 Grandezze critiche

a Profondità critica

Diciamo *carico specifico* E di una corrente in una sezione il carico effettivo misurato rispetto alla linea di fondo. Dunque

$$E = Y + \alpha \frac{U^2}{2g} = Y + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \quad \alpha = \frac{\int_{\Omega} U^3 d\Omega}{U^3 \Omega} \quad (3.1.1 a, b)$$

con Q portata volumetrica e α coefficiente correttivo dell'energia cinetica.

È di interesse esaminare le condizioni nelle quali può avvenire il deflusso di una assegnata portata al variare del carico specifico o, per un assegnato carico specifico, al variare della portata.

Nel primo caso, essendo Ω una funzione crescente con Y , segue che una assegnata portata può defluire con carico specifico che tende a infinito sia per valori grandi di Y sia per $Y \rightarrow 0$. Deve esistere dunque almeno un valore di

profondità Y_c detta critica per l'assegnata portata cui corrisponde un minimo di E (relativo o assoluto). Si ha evidentemente

$$\left[\frac{\partial E}{\partial Y} \right]_{Q=const} = 0 \quad (3.1.2a)$$

se

$$\left[\Omega^{-3} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \right]_{Y=Y_c} = \frac{g}{\alpha Q^2} \quad (3.1.2b)$$

Ma, in generale,

$$b(Y) = \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \quad (3.1.3)$$

donde la (3.1.2b) diventa

$$\left[\frac{\Omega^3}{b} \right]_{Y=Y_c} = \alpha \frac{Q^2}{g} \quad (3.1.4)$$

L'esplicitazione della (3.1.4) richiede la conoscenza della forma della sezione. In particolare per una sezione rettangolare la (3.1.4) porge

$$Y_c = \left(\alpha \frac{Q^2}{gb^2} \right)^{1/3} \quad (3.1.5)$$

La fig. 3.1 rende graficamente conto della nozione di profondità critica.

Nel secondo caso, assegnato E , la (3.1.1) porge

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{2g}{\alpha}(E - Y)} \quad (3.1.6)$$

La (3.1.6) mostra che la funzione $Q(Y)$ si annulla in corrispondenza degli estremi dell'intervallo di definizione $Y = 0$ ed $Y = E$. Dunque, essendo Q definita positiva, la funzione $Q(Y)$ deve presentare almeno un massimo per una profondità Y_c , detta critica per l'assegnato carico specifico. La (3.1.6) porge

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial Y} \right]_{E=const} = 0 \quad (3.1.7a)$$

se

$$\left[\sqrt{\frac{2g}{\alpha}(E - Y)} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} - \sqrt{\frac{2g}{\alpha}} \Omega \frac{1}{2\sqrt{E - Y}} \right]_{Y=Y_c} = 0 \quad (3.1.7b)$$

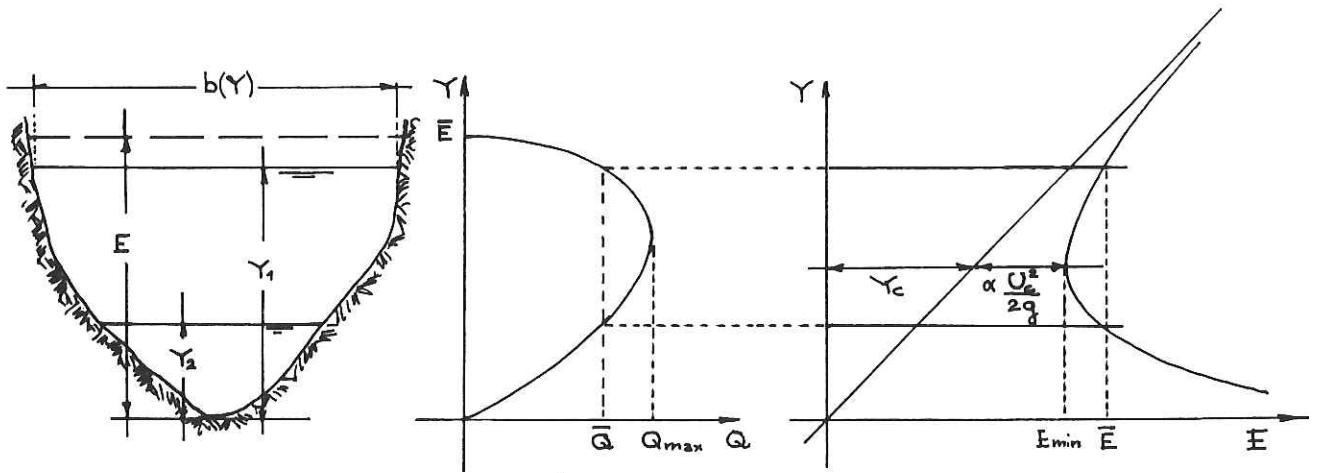


Figura 3.1:

donde

$$Y_c + \left(\frac{\Omega}{2b} \right)_{Y=Y_c} = E \quad (3.1.8)$$

La (3.1.8) fornisce, assegnata la forma della sezione, la profondità critica per l'assegnato carico E . In particolare per una sezione rettangolare si ha:

$$Y_c = \frac{2}{3} E \quad (3.1.9)$$

Esempi

i) *Il caso dell'alveo cilindrico a sezione triangolare*

Con le notazioni in figura 3.2 si ha:

$$b = 2Y \operatorname{tg}(\theta) \quad \Omega = Y^2 \operatorname{tg}(\theta)$$

donde

$$[Y_c]_{Q=\text{cost}} = \left[2 \frac{\alpha}{g} \frac{Q^2}{\operatorname{tg}^2(\theta)} \right]^{1/5}$$

$$[Y_c]_{E=\text{cost}} = \frac{4}{5} E$$

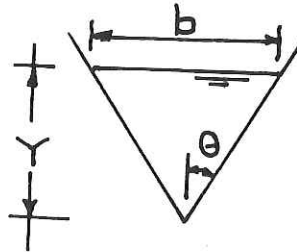


Figura 3.2:

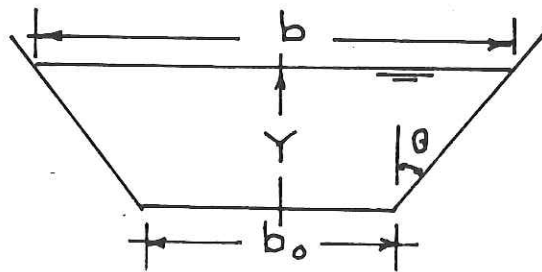


Figura 3.3:

ii) Il caso dell'alveo cilindrico a sezione trapezia

Con le notazioni in figura 3.3 si ha:

$$b = b_0 + 2Y \operatorname{tg}(\theta) \quad \Omega = b_0 Y + Y^2 \operatorname{tg}(\theta)$$

donde

$$[Y_c]_{E=\text{cost}} = \frac{E}{10} (-3x + 4 + \sqrt{9x^2 + 16x + 16}) \quad \text{con} \quad x = \frac{b_0}{E \operatorname{tg}(\theta)}$$

Analogamente $[Y_c]_{Q=\text{cost}}$ si trova essere soluzione di un'equazione algebrica di VI grado

$$\left(\frac{Y_c}{Y_{co}}\right)^3 \left(1 + \frac{Y_c Y_{co} \operatorname{tg}(\theta)}{Y_{co} b_0}\right)^3 = 1 + 2 \frac{Y_c Y_{co} \operatorname{tg}(\theta)}{Y_{co} b_0}$$

con

$$Y_{co} = \left(\alpha \frac{Q^2}{g b_0^2}\right)^{1/3}$$

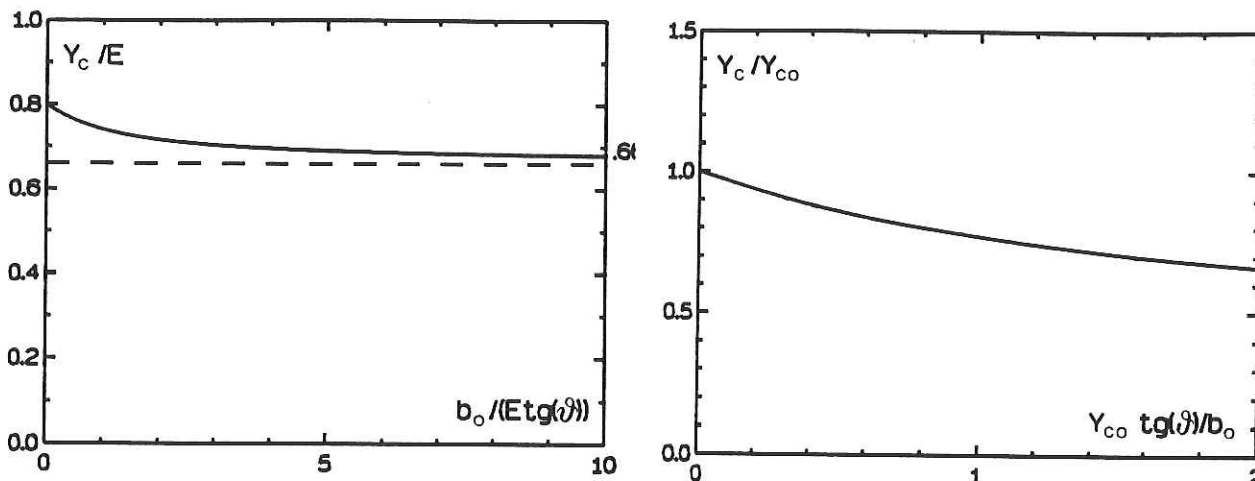


Figura 3.4:

Le figure 3.4 riportano rispettivamente il grafico di (Y_c/E) in funzione di $(b_o/Etg\theta)$ e di (Y_c/Y_{co}) in funzione di $(Y_{co}tg\theta/b_o)$.

Il lettore noti che Y_c/E decresce dal valore 0.8 tipico degli alvei triangolari (per $b_o = 0$) al valore 0.66 tipico degli alvei rettangolari (per $\theta = 0$).

4/5
↓
2/3

iii) *Il caso dell'alveo a sezione circolare*

Con le notazioni in figura 3.5 si ha

$$b = 2R \sin(\theta) \quad \Omega = R^2\theta - R^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

È opportuno in tal caso valutare θ_c , cioè il valore dell'angolo θ in condizioni critiche. Si ricava quindi direttamente Y_c attraverso la relazione

$$Y = R(1 - \cos \theta)$$

Si trova:

$$\frac{\theta_c}{4 \sin(\theta)_c} \frac{5}{4} \cos(\theta)_c = \frac{E}{R} - 1 \quad \text{per } E = cost$$

$$\frac{[\theta_c - \sin(\theta)_c \cos(\theta)_c]^3}{2 \sin(\theta)_c} = \frac{\alpha Q^2}{gR^5} \quad \text{per } Q = cost$$

I grafici riportati nelle figure 3.6 consentono la determinazione diretta del valore critico θ_c .

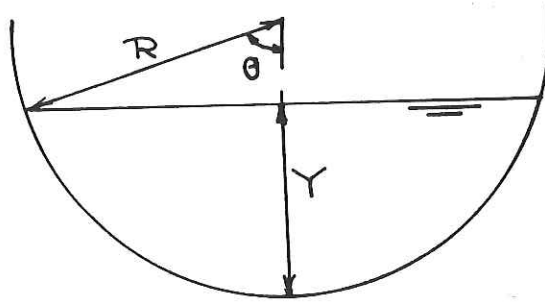


Figura 3.5:

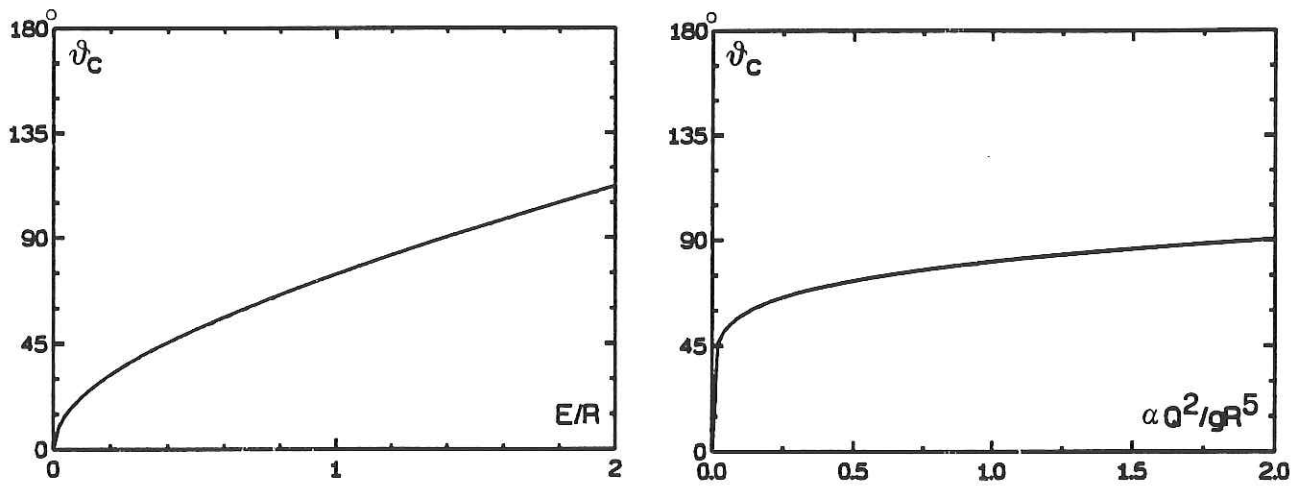


Figura 3.6:

$$\frac{n^3}{b} = \alpha \frac{Q^2}{g} \rightarrow \frac{Q^2}{U^2} = \frac{n^3}{b} \frac{g}{\alpha}$$

b Velocità critica

Riprendiamo il discorso sulla definizione delle grandezze critiche osservando che lo stato critico relativo a una assegnata portata è caratterizzato da un valore di velocità detta anch'essa *critica*. Dunque

$$U_c = \frac{Q}{[\Omega]_{Y=Y_c}} = \sqrt{\frac{g}{\alpha} \left[\frac{\Omega}{b} \right]_{Y=Y_c}} \quad (3.1.10)$$

La (3.1.10) può essere posta in forma più chiara osservando che (Ω/b) può interpretarsi come profondità media Y_m , cioè profondità della sezione rettangolare equivalente di area Ω e larghezza del pelo libero b . Segue

$$U_c = \sqrt{\frac{g}{\alpha} Y_m \Big|_{Y=Y_c}} \quad (3.1.11)$$

In particolare per la sezione rettangolare

$$U_c = \sqrt{g Y_c / \alpha} \quad (3.1.12)$$

La definizione appena introdotta consente di fornire una diversa interpretazione dello stato critico come stato che separa correnti veloci (tali cioè che $U > U_c$) da correnti lente (tali che $U < U_c$). La figura 3.7 mostra che le correnti veloci sono caratterizzate da profondità inferiori a Y_c , mentre le correnti lente hanno profondità maggiori di Y_c .

Per assegnati valori di Q ed E la corrente può assumere in generale uno dei due valori Y_1 di corrente lenta o Y_2 di corrente veloce.

Definito il numero di Froude nella forma

$$F = \frac{U}{\sqrt{g Y_m}} \quad (3.1.13)$$

segue che, a meno del coefficiente correttivo α , si ha ($U > U_c$), cioè ($F > 1$), per le correnti veloci e ($U < U_c$) cioè ($F < 1$), per le correnti lente.

La distinzione fra correnti veloci e correnti lente può essere introdotta in modo più efficace confrontando la velocità media della corrente con quella delle piccole perturbazioni che si propagano su un moto base uniforme. (Vedi capitolo 4).

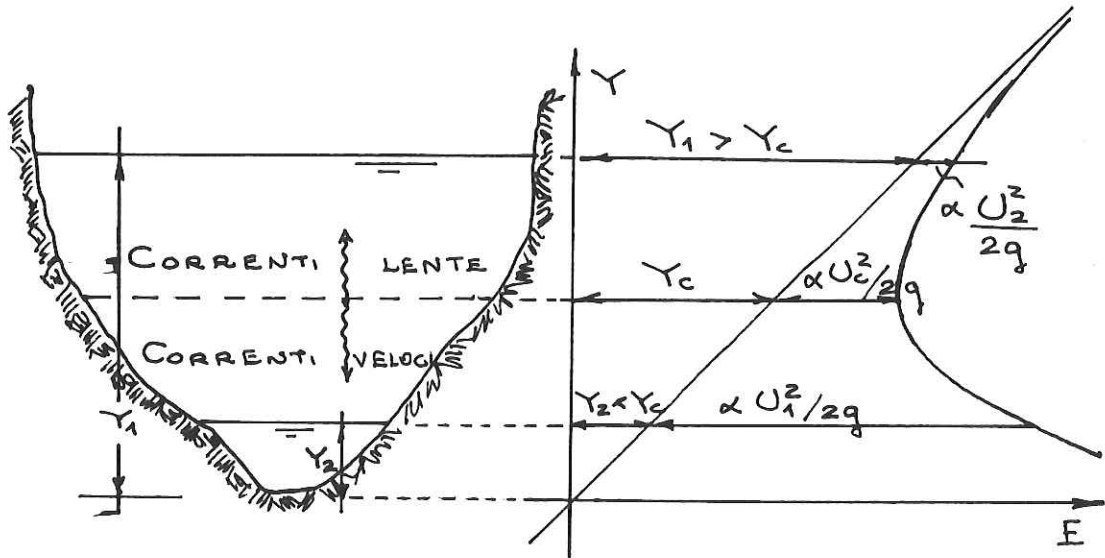


Figura 3.7:

c Pendenza critica

Notiamo infine che, assegnata la portata Q e le caratteristiche dell'alveo, a ogni pendenza del fondo i_f è associata una profondità di moto uniforme Y_u in generale distinta dalla profondità critica Y_c . Diciamo *pendenza critica* la pendenza i_c che, per l'assegnata portata Q , dà luogo a una profondità di moto uniforme coincidente con la profondità critica.

Ricordando l'equazione del moto uniforme segue

$$i_c = \frac{Q^2}{g[\Omega^2 C^2 R_i]_{Y=Y_c}} = \frac{n^3}{b d_c} \frac{1}{n^2 R_{i,c}} \quad (3.1.14a)$$

o, ricordando la (3.1.4),

$$i_c = \left[\frac{\Omega}{\alpha b C^2 R_i} \right]_{Y=Y_c} = \left[\frac{B}{\alpha b C^2} \right]_{Y=Y_c} \quad (3.1.14b)$$

Esempi

i) Alveo a sezione rettangolare

$$i_c = \left(\frac{1}{\alpha C^2} \right)_{Y=Y_c} \left[1 + \frac{2}{b} \left(\alpha \frac{Q^2}{g b^2} \right)^{1/3} \right]$$

$$\frac{B}{b} \Big|_c = \frac{b+2y}{b} \Big|_c = 1 + \frac{2}{b} y_c = 1 + \frac{2}{b} \left(\frac{\alpha Q^2}{g b^2} \right)^{1/3}$$

Handwritten notes on the left side of the page:

- $\frac{n^3}{b} \Big|_c = \frac{n^3}{g^2 \alpha}$
- $\frac{Q^2}{g} = \frac{n^3}{b} \frac{1}{\alpha}$

In particolare se la sezione è infinitamente larga $(B/b_o \approx 1)$

$$i_c = \left(\frac{1}{\alpha C^2} \right)_{Y=Y_c}$$

ii) *Alveo a sezione triangolare* (figura 3.2)

$$i_c = \frac{1}{(\alpha C^2)_{Y=Y_c}} \frac{1}{\sin(\theta)}$$

iii) *Alveo a sezione trapezia* (figura 3.3)

$$i_c = \frac{1}{(\alpha C^2)_{Y=Y_c}} \frac{b_o + 2Y_c / \cos(\theta)}{b_o + 2Y_c \operatorname{tg}(\theta)} = \frac{1}{(\alpha C^2)_{Y=Y_c}} \frac{1 + 2Y_c / (b_o \cos(\theta))}{1 + 2Y_c \operatorname{tg}(\theta) / b_o}$$

iv) *Alveo a sezione circolare* (figura 3.4)

$$i_c = \frac{1}{(\alpha C^2)_{Y=Y_c}} \frac{\theta_c}{\sin(\theta_c)}$$

Gli esempi precedenti mostrano che l'ordine di grandezza di i_c si aggira in tutti i casi intorno a $(1/C^2)_{Y=Y_c}$. Posto che C può di massima variare fra 10 e 30 segue che l'ordine di grandezza di i_c si aggira fra l'1% e lo 0.1%.

Gli alvei con pendenza i_f inferiore a i_c diconsi *fluviali*, quelli con pendenza superiore a i_c diconsi *torrentizi*; in entrambi i casi la condizione dipende dal valore della portata assegnata. Inoltre gli alvei fluviali sono tali che $Y_u > Y_c$, per quelli torrentizi è $Y_u < Y_c$. Infatti si ha:

$$\frac{i_c}{i_f} = \frac{(\Omega^2 C^2 R_i)_{Y=Y_u}}{(\Omega^2 C^2 R_i)_{Y=Y_c}} \quad (3.1.15)$$

Essendo $(\Omega^2 C^2 R_i)$ funzione crescente di Y segue

$$i_F > i_c \Leftrightarrow Y_u < Y_c \quad i_F < i_c \Leftrightarrow Y_u > Y_c \quad (3.1.16 a, b)$$

Dunque le correnti uniformi sono veloci negli alvei torrentizi, lente negli alvei fluviali.

Ribadiamo che lo stesso alveo, con pendenza i_f assegnata, può mutare carattere al variare della portata, in particolare può trasformarsi da torrentizio in fluviale al decrescere della portata. Ad esempio, nel caso degli alvei a sezione rettangolare molto larga o triangolare i_c decresce al crescere della portata, cioè della profondità critica e, quindi, di C .

d Il caso degli alvei naturali

Nel caso di sezione di forma irregolare e disuniforme distribuzione della scabrezza la determinazione delle grandezze critiche deve essere effettuata facendo riferimento alle definizioni delle caratteristiche della corrente.

In particolare la *profondità critica per assegnata portata* si ottiene ricercando numericamente il minimo della funzione $E(Y)$ definita nella forma:

$$E = Y + \alpha(Y) \frac{Q^2}{2g\Omega^2(Y)} \quad (3.1.17)$$

con $\alpha(Y)$ definito dalla (2.5.9). L'influenza del coefficiente correttivo $\alpha(Y)$ e della sua derivata può risultare significativa come emerge dalla relazione

$$\frac{\Omega^3(Y)}{\alpha(Y)b(Y) \left[1 - \frac{\Omega(Y)}{2b(Y)} \frac{1}{\alpha(Y)} \frac{d\alpha}{dY} \right]} \Bigg|_{Y=Y_c} = \frac{Q^2}{g} \quad (3.1.18)$$

che sostituisce la (3.1.4) nel caso in esame.

Analogamente la *profondità critica per assegnato carico specifico* E si può ottenere ricercando il massimo della funzione

$$Q = \frac{\Omega(Y)}{\sqrt{\alpha(Y)}} \sqrt{2g(E - Y)} \quad (3.1.19)$$

e la (3.1.8) si generalizza in questo caso nella relazione

$$Y + \frac{\Omega}{2b} \frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega}{2b} \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dY} \right)} \Bigg|_{Y=Y_c} = E \quad (3.1.20)$$

La *velocità critica* si ottiene a partire dalla (3.1.18) nella forma:

$$U_c = \sqrt{\frac{\Omega(Y_c)}{\alpha(Y_c)b(Y_c)} \left[1 - \frac{\Omega(Y_c)}{2\alpha(Y_c)b(Y_c)} \frac{d\alpha}{dY} \Bigg|_{Y_c} \right]}^{-1/2} \quad (3.1.21)$$

Infine la *pendenza critica* assume la forma

$$i_c = \frac{Q^2}{g} \left[\int_{-b_1}^{b_2} C(y) Y^{3/2}(y) dy \right]^{-2} \quad (3.1.22)$$

3.2 Le equazioni del moto

a Profili stazionari della corrente in alvei cilindrici o quasi-cilindrici

Le equazioni di continuità e del moto nell'ambito del modello 1-D per moti stazionari e in assenza di vento si ottengono dalle (1.4.21) e (1.4.23).

Posto $\beta \simeq 1$, un'ipotesi appropriata per sezioni regolari di alvei quasi-cilindrici, si trova:

$$Q = \Omega U = cost \quad (3.2.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left(h + \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{\tau_o^f}{\rho g R_i} \quad (3.2.2)$$

ciò nelle ipotesi avanzate al §1.4 che sono riassumibili nell'ipotesi di quasi-cilindricità (o quasi-unidirezionalità o graduale variazione) del moto.

Fra le conseguenze dello schema adottato vi è, ricordiamo, la possibilità di scrivere h nella forma

$$h = z_f + Y \quad (3.2.3)$$

ciò grazie al carattere idrostatico della distribuzione della pressione e alla possibilità di confondere le sezioni normali all'asse della corrente con sezioni verticali.

La (3.2.2) diventa dunque

$$\frac{d}{dx} \left(z_f + Y + \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{dH}{dx} = -j \quad (3.2.4a)$$

$$j = \frac{\tau_o^f}{\rho g R_i} \quad (3.2.4b)$$

con j pendenza della linea dei carichi effettivi. Tale quantità viene calcolata assumendo che il moto si comporti come una successione continua di stati localmente uniformi, ritenendo cioè che τ_o^f possa confondersi col valore che si avrebbe in un moto uniforme caratterizzato dai valori locali di U , C ed R_i .
Segue:

$$j = \frac{U^2}{g C^2 R_i} = \frac{Q^2}{g \Omega^2 C^2 R_i} \quad (3.2.5)$$

Il sistema (3.2.4, 5) consente l'integrazione, cioè la determinazione del profilo $Y(x)$ per assegnati valori di i_f e Q e delle caratteristiche dell'alveo, purché siano note condizioni opportune in corrispondenza delle sezioni di estremità del tronco considerato.

$$\frac{dH}{dx} = \cancel{J} - J = \frac{dE}{dx} - i_f \rightarrow \frac{dE}{dx} = i_f - J$$

b Andamento qualitativo dei profili per alvei cilindrici a pendenza costante

Se l'alveo è cilindrico si ha $\Omega = \Omega[Y(x)]$, cioè le variazioni di sezione sono associate solo a variazioni di profondità. In tal caso la (3.2.4a), che può scriversi nella forma

$$\frac{dE}{dx} = i_f - j \quad (3.2.6)$$

avendo assunto $\alpha = 1$, diventa

$$\frac{dE}{dx} \frac{dY}{dY} = i_f - j \quad \longrightarrow \quad \frac{dY}{dx} = \frac{i_f - j}{dE/dY} \quad (3.2.7)$$

La (3.2.7) è l'equazione dei profili di rigurgito in alvei cilindrici.

La (3.2.7) suggerisce immediatamente l'esistenza di tre casi limite. Posto che $Y_u \neq Y_c$ per un'assegnata portata:

- se $Y \rightarrow Y_u$ allora $j \rightarrow i_f$ e il profilo tende a disporsi parallelo al fondo;
- se $Y \rightarrow Y_c$ allora $dE/dY \rightarrow 0$ e il profilo tende a disporsi ortogonale al fondo;
 $\frac{dY}{dx} \rightarrow \infty$
- se $Y \rightarrow \infty$ allora $j \rightarrow 0$ ed $E \rightarrow Y$, donde $dE/dY \rightarrow 1$ e il profilo tende a un asintoto orizzontale. $\frac{dY}{dx} \rightarrow i_f$

Una più attenta analisi del comportamento del secondo membro della (3.2.7) al variare della profondità Y consente una discussione qualitativa dell'andamento dei possibili profili nei diversi intervalli di profondità significativi.

È opportuno distinguere il caso di alveo cilindrico *declive* ($i_f > 0$) da quello di alveo *orizzontale* o *acclive* ($i_f \leq 0$).

I) Il caso degli alvei cilindrici declivi

Riscriviamo anzitutto la (3.2.7) nella forma

$$\frac{dY}{dx} = \frac{N}{D} i_f \quad N = 1 - \frac{Q^2}{i_f g C^2 \Omega^2 R_i} \quad D = 1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3} \quad (3.2.8a - c)$$

Si danno allora tre casi:

$$\parallel \\ 1 - F_r^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{if - J(x)}{1 - F_r^2(x)}$$

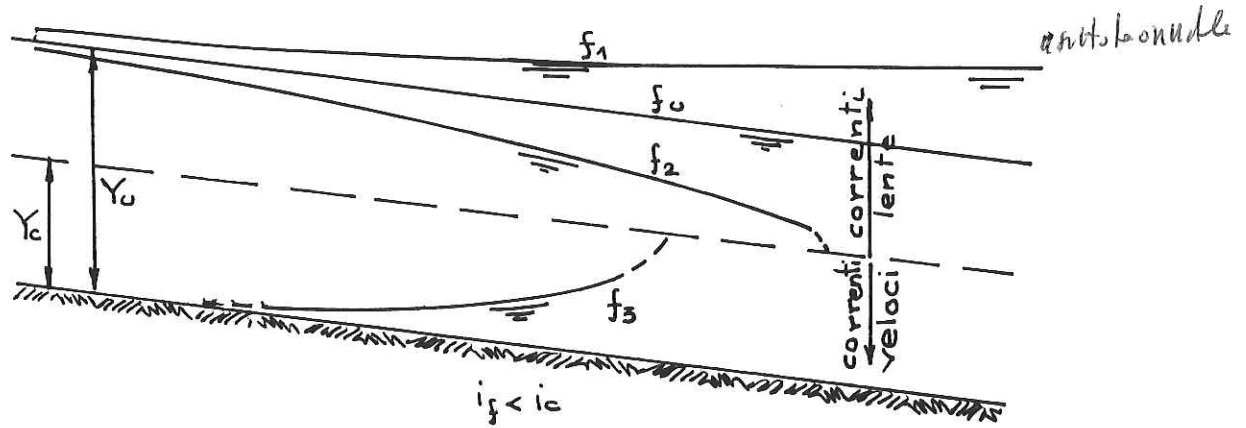


Figura 3.8:

i) $i_f < i_c$ (alveo fluviale): $Y_u > Y_c$. La (3.2.8a) porge:

$$0 < Y < Y_c \Rightarrow N < 0 ; D < 0 \Rightarrow \frac{dY}{dx} > 0 \quad (3.2.9)$$

$$Y_c < Y < Y_u \Rightarrow N < 0 ; D > 0 \Rightarrow \frac{dY}{dx} < 0 \quad (3.2.10)$$

$$Y_u < Y < \infty \Rightarrow N > 0 ; D > 0 \Rightarrow \frac{dY}{dx} > 0 \quad (3.2.11)$$

La figura 3.8 illustra l'andamento qualitativo dei profili. Si noti che essi perdono significato in un intorno di $Y = Y_c$ ed $Y = 0$. Si noti inoltre come la corrente possa ovviamente essere veloce pur defluendo in un alveo fluviale.

Esiste una famiglia di profili per ciascuno degli andamenti qualitativi riportati in figura 3.8. La precisazione del particolare profilo che si realizza in ciascuna particolare configurazione richiede la conoscenza delle condizioni al contorno.

ii) $i_f < i_c$ (alveo torrentizio): $Y_u < Y_c$

In tal caso la (3.2.8a) porge

$$0 < Y < Y_u \Rightarrow N < 0 ; D < 0 \Rightarrow \frac{dY}{dx} > 0 \quad (3.2.12)$$

$$Y_u < Y < Y_c \Rightarrow N > 0 ; D < 0 \Rightarrow \frac{dY}{dx} < 0 \quad (3.2.13)$$

$$Y_c < Y < \infty \Rightarrow N > 0 ; D > 0 \Rightarrow \frac{dY}{dx} > 0 \quad (3.2.14)$$

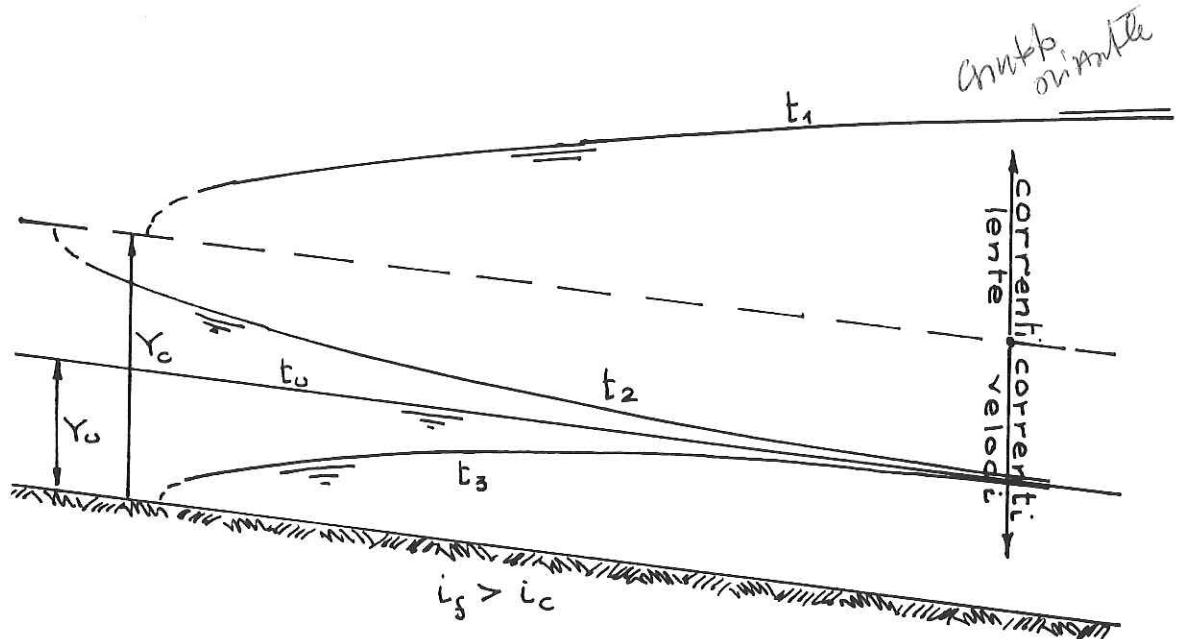


Figura 3.9:

La figura 3.9 illustra qualitativamente l'andamento dei profili previsto dalle precedenti relazioni.

iii) $i_f = i_c$ (alveo con pendenza critica): $Y_u = Y_c$

Riscriviamo la (3.2.8a) nella forma

$$\frac{dY}{dx} = i_f \left[1 - \frac{[\Omega^3 C^2 / B]_{Y=Y_c}}{\Omega^3 C^2 / B} \right] \left[1 - \frac{[\Omega^3 / b]_{Y=Y_c}}{\Omega^3 / b} \right]^{-1} \quad (3.2.15)$$

Dalla (3.2.11) segue che nel caso di alveo a sezione rettangolare molto larga ($B \simeq b$) il profilo della corrente è molto prossimo all'orizzontale tanto per $Y > Y_c$ quanto per $Y < Y_c$. Più precisamente tale risultato si ottiene se si assume C costante. Tenendo conto delle variazioni di C si ha $(dY/dx) > i_f$, cioè il profilo è lievemente crescente verso valle sia per $Y > Y_c$ sia per $Y < Y_c$ (vedi figura 3.10). Analogo risultato si ottiene per il caso di alveo a sezione triangolare.

I risultati precedenti non sono generalizzabili ad alvei a sezione qualsiasi anche se la (3.2.11) suggerisce che i profili c_1 e c_2 non si discosteranno presumibilmente molto dall'andamento orizzontale.

Si noti inoltre che il profilo di moto uniforme c_u non si realizza mai in pratica essendo lo stato critico fortemente instabile come emerge dalla

3.2.16

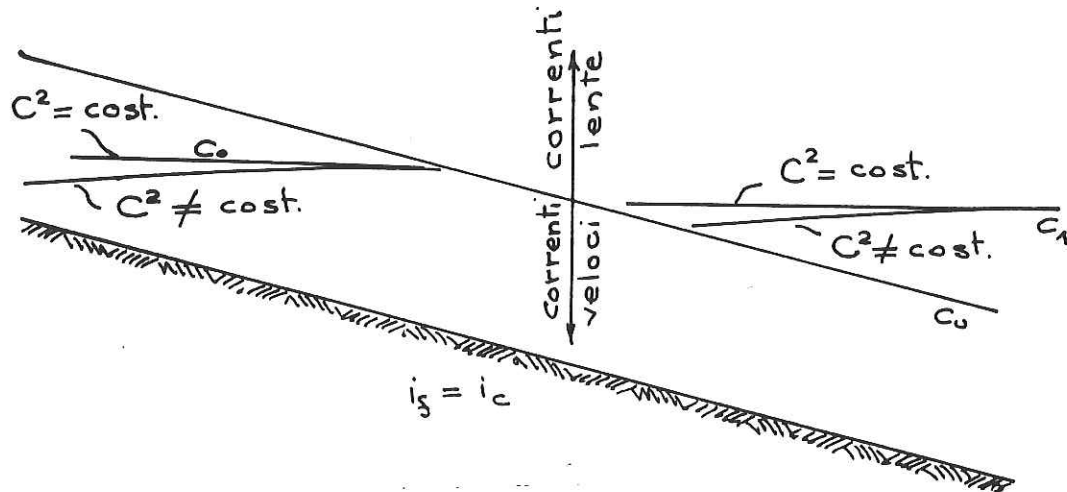


Figura 3.10:

curva $E(Y)$ in fig. 3.1: sono infatti sufficienti modeste variazioni di E nell'intorno di Y_c a produrre significative oscillazioni di profondità.

II) Il caso degli alvei orizzontali o acclivi

Gli alvei *orizzontali* o *acclivi* non hanno profondità di moto uniforme: questa tende ad assumere valori infinitamente grandi al tendere di i_f a zero.

La (3.2.7) suggerisce che per $i_f \leq 0$ il numeratore risulta sempre negativo sicché (dY/dx) risulta negativo (positivo) per $Y > Y_c$ (per $Y < Y_c$) (figura 3.11).

c Integrazione per alvei rettangolari molto larghi con C costante (Bresse, 1860)

Il profilo liquido è determinabile in forma analitica nel caso di alveo a sezione rettangolare molto larga ($R \rightarrow Y$) se si opera l'approssimazione $C = \text{cost}$ (Bresse, 1860)¹. In tal caso la (3.2.17) diventa

$$\frac{dY}{dx} = i_f \frac{Y^3 - Y_u^3}{Y^3 - Y_c^3} \quad (3.2.16)$$

donde

$$dx = \frac{Y_u}{i_f} \left[1 - \frac{1 - K^3}{1 - y^3} \right] dy \quad (3.2.17)$$

¹Bresse, J.C. (1860). Cours de mécanique appliquées, Hydraulique, Paris.

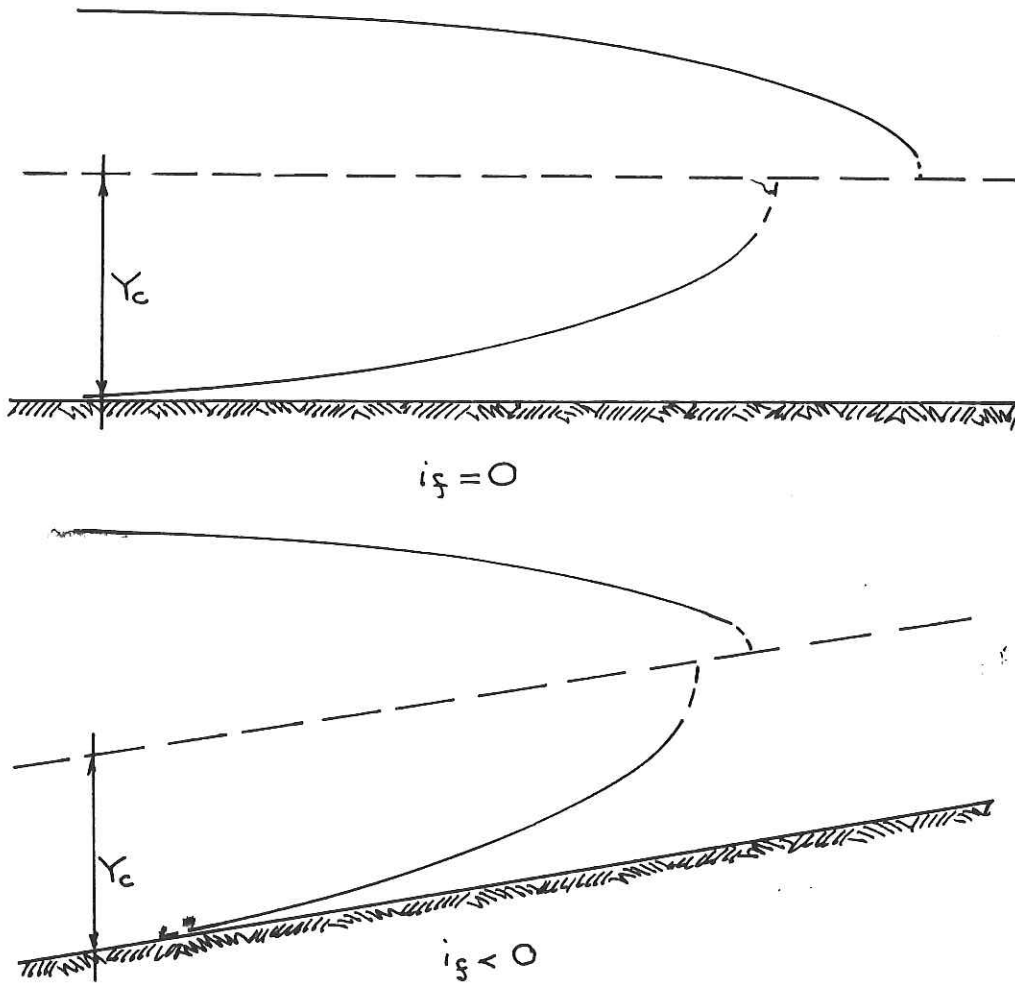


Figura 3.11:

con

$$y = \frac{Y}{Y_u} \quad K = \frac{Y_c}{Y_u} \quad (3.2.18a, b)$$

Posto

$$\phi(\xi) \int_0^\xi \frac{dy}{1-y^3} \quad (3.2.19)$$

la (3.2.17) fornisce l'integrale generale nella forma

$$x_o - x = \frac{Y_o - Y}{i_f} - \frac{Y_u}{i_f} (1 - K^3) \left[\phi\left(\frac{Y_o}{Y_u}\right) - \phi\left(\frac{Y}{Y_u}\right) \right] \quad (3.2.20)$$

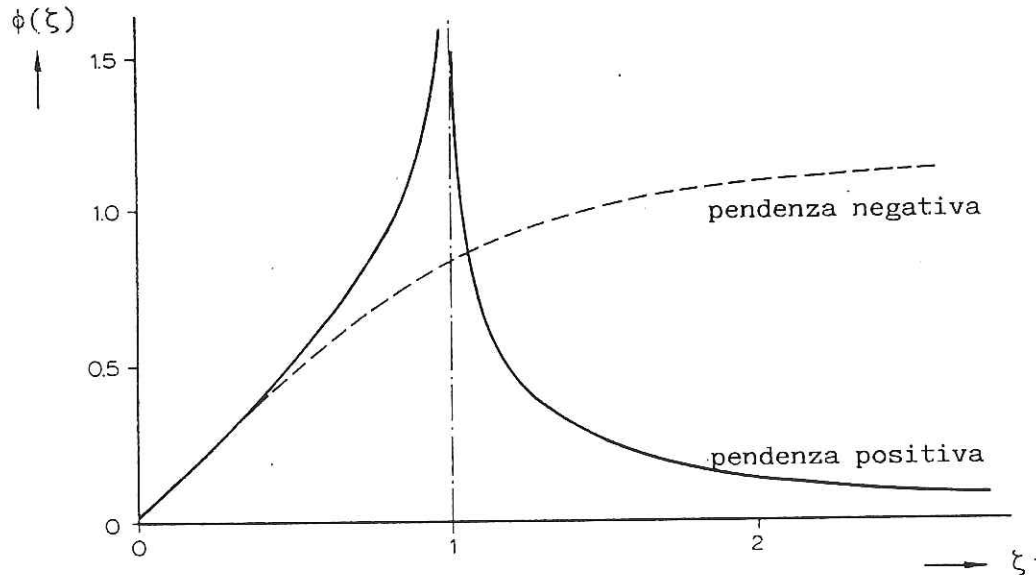


Figura 3.12:

La funzione ϕ si ricava in forma esplicita

$$\phi(\xi) = \frac{1}{6} \ln \frac{(\xi^2 + \xi + 1)}{(\xi - 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\xi + 1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (3.2.21)$$

ed è comunque tabellata nei manuali consentendo così il tracciamento del profilo calcolando l'ascissa ($x_o - x$) associata ad ogni profondità Y assegnata. Nella (3.2.20) Y_o ed x_o sono i valori di profondità e ascissa iniziali.

La funzione di Bresse è riportata in figura 3.12.

Per alvei cilindrici e sezione diversa dalla rettangolare molto larga sono stati proposti nel passato numerosi metodi approssimati di integrazione diretta. Tali procedimenti (discussi da V.T. Chow (1959)²) sono oggi sostanzialmente obsoleti essendo assai più agevole l'integrazione numerica delle equazioni originarie (vedi §3.3).

²V.T. Chow (1959), Open Channel Hydraulics, Mc Graw-Hill, N.Y.

d Andamento qualitativo dei profili per alvei cilindrici a pendenza variabile

Esaminiamo ora il caso in cui una graduale variazione di pendenza della linea di fondo concorre a determinare l'andamento del profilo della superficie libera della corrente. Tale studio iniziato da Massè (1938)³ è stato successivamente sviluppato da numerosi autori fra cui De Marchi (1950)⁴.

È opportuno analizzare l'andamento qualitativo dei profili che possono realizzarsi considerando il caso semplice di alveo rettangolare molto largo e approssimando il coefficiente di resistenza come costante. In tal caso la (3.2.7) può porsi nella forma:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{i_f - j}{1 - (Y_c/Y)^3} = G(x, Y) \quad (3.2.22)$$

È allora conveniente discutere il comportamento della soluzione in un intorno dei punti singolari della (3.2.22), definiti dai valori di x per i quali la funzione G cessa di essere continua o almeno Lipschitziana.

Può essere utile ricordare infatti che il teorema fondamentale di esistenza e unicità per le equazioni differenziali ordinarie assicura per l'equazione del I ordine (3.2.22) esistenza ed unicità della soluzione per ogni punto (x_o, Y_o) del dominio in cui la funzione $G(x, Y)$ risulta continua e Lipschitziana nei confronti della Y . Il carattere continuo e Lipschitziano della G implica dunque che le *caratteristiche* della (3.2.22), cioè se le curve che rappresentano geometricamente i suoi integrali nel piano (x, Y) , solchino tale piano senza mai intersecarsi fra loro. Tale condizione viene meno nei punti singolari.

Lo studio dei punti singolari fu iniziato da Poincaré alla fine del secolo scorso, continuato da Bendixson⁵ nel 1901 e poi da molti altri autori sulla base di ipotesi via via meno restrittive riguardanti la struttura della funzione G espressa come rapporto di due funzioni $N(x, Y)$ e $D(x, Y)$ che si annullano entrambe nei punti singolari.

Tale condizione si ottiene considerando quei valori della profondità, detta normale, Y_n , che annullano il numeratore della (3.2.22): essi rappresentano la profondità di moto uniforme nello stesso alveo supposto cilindrico con la pendenza che il fondo ha nella sezione in esame. L'insieme dei valori

³Massè, P. (1938), Revue Gén. de l'Hydraulique, nn. 18, 19.

⁴De Marchi, G. (1950). L'Energia Elettrica, 27, 3.

⁵Bendixson, I. (1901), Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math, 24, 1-88.

$Y_n(x)$ definiscono una *linea detta linea delle profondità normali*. Peraltro, assegnata la portata, resta anche associata a ogni sezione una profondità critica. La funzione G risulta indeterminata in quelle sezioni x_M in cui la linea delle profondità normali interseca la linea delle profondità critiche: ivi si ha $Y_M = Y_n = Y_c$.

In un intorno sufficientemente piccolo dei punti singolari, essendo $j = q^2/(gC^2Y^3)$, con q portata per unità di larghezza, può porsi

$$G = \frac{c(x - x_M) + d(Y - Y_M)}{a(x - x_M) + b(Y - Y_M)} \quad (3.2.23)$$

con

$$c = \left(\frac{di_f}{dx} \right)_M \quad d = - \left(\frac{\partial j}{\partial Y} \right)_M = \frac{3q^2}{C^2 g Y_M^4} = \frac{3i_c}{Y_M} \quad a = 0 \quad b = \frac{3}{Y_M} \quad (3.2.24a - d)$$

La teoria delle equazioni differenziali ordinarie (vedi per es. Tricomi (1961)⁶) suggerisce l'opportunità di distinguere fra diversi casi, dipendenti dal segno delle quantità

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc = \frac{9i_c^2}{Y_M^2} + \frac{12}{Y_M} \left(\frac{di_f}{dx} \right)_M \quad (3.2.25a)$$

$$\delta = ad - bc = -\frac{3}{Y_M} \left(\frac{di_f}{dx} \right)_M \quad (3.2.25b)$$

i) Il caso $\Delta > 0$, $\delta < 0$: *il colle*

Fisicamente questo caso corrisponde ad alvei con pendenza del fondo crescente nel verso del moto (figura 3.13).

In tal caso il punto singolare è detto *colle* poiché le caratteristiche nell'intorno di M ricordano le curve di livello di una carta topografica nell'intorno di un colle. Esistono due profili v_1 e v_2 passanti per M che separano quattro diverse regioni. In particolare il profilo v_1 è asintotico alla curva delle profondità normali (la $N = 0$).

La (3.2.22) mostra infatti che: i) un profilo con Y compresi fra Y_n e Y_c risulta sempre decrescente con $i_f > j$ ed è asintotico dall'alto alla curva delle profondità normali verso valle per $j \rightarrow i_f$ mentre tende verso monte alla profondità critica con direzione ortogonale al fondo, tranne il profilo v_1 che attraversa la profondità critica nel punto singolare M ; ii) un profilo con

⁶Tricomi, F.G. (1961), Equazioni differenziali, Ed. Boringhieri.

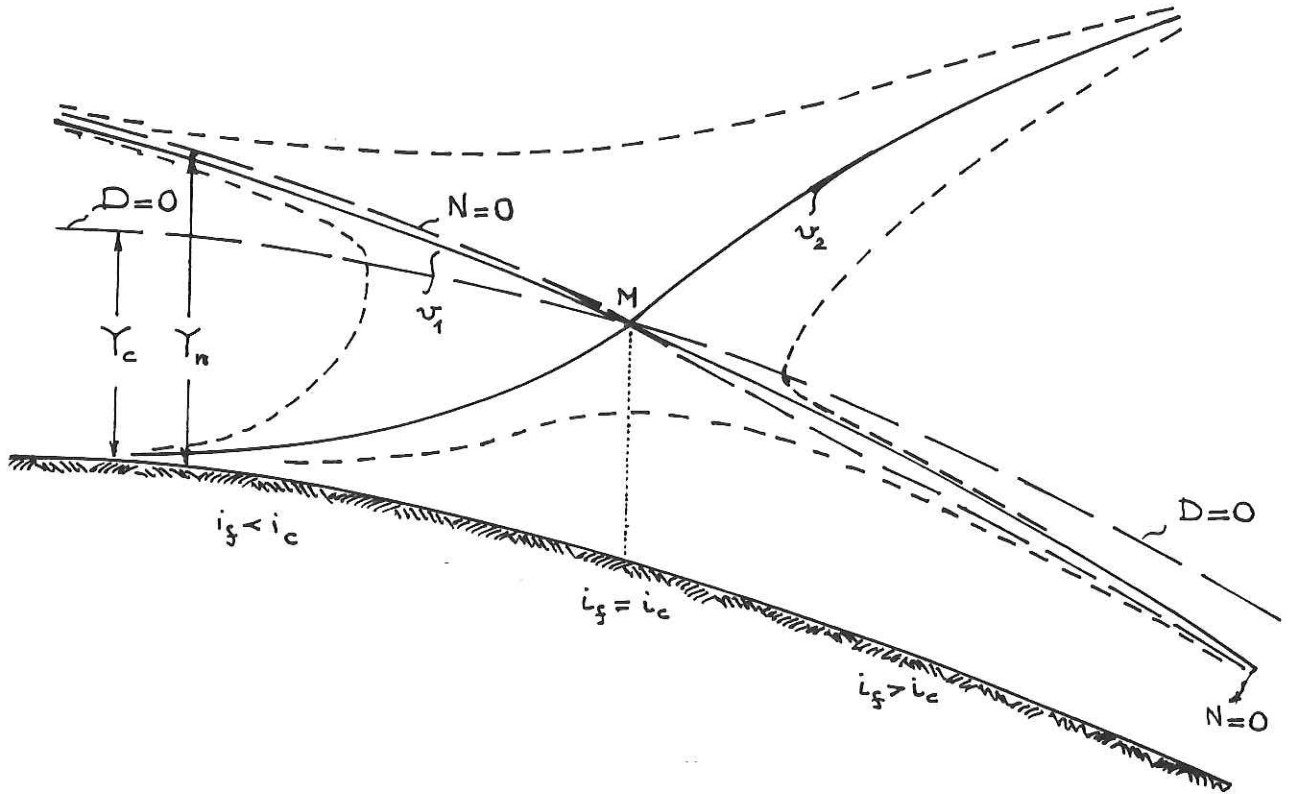


Figura 3.13:

$Y_c < Y < Y_n$ risulta ancora decrescente verso valle con $i_f < j$ ed è asintotico alla curva delle profondità normali dal basso verso monte per $j \rightarrow i_f$ mentre tende verso valle alla profondità critica con direzione ortogonale al fondo, tranne il profilo v_1 che attraversa la profondità critica nel punto singolare M .

Tutti i restanti profili:

- non passano per M ,
- sono asintotici a v_1 e v_2 ,
- attraversano la profondità critica con tangente ortogonale al fondo.

ii) Il caso $\Delta > 0$, $\delta > 0$: *il nodo*

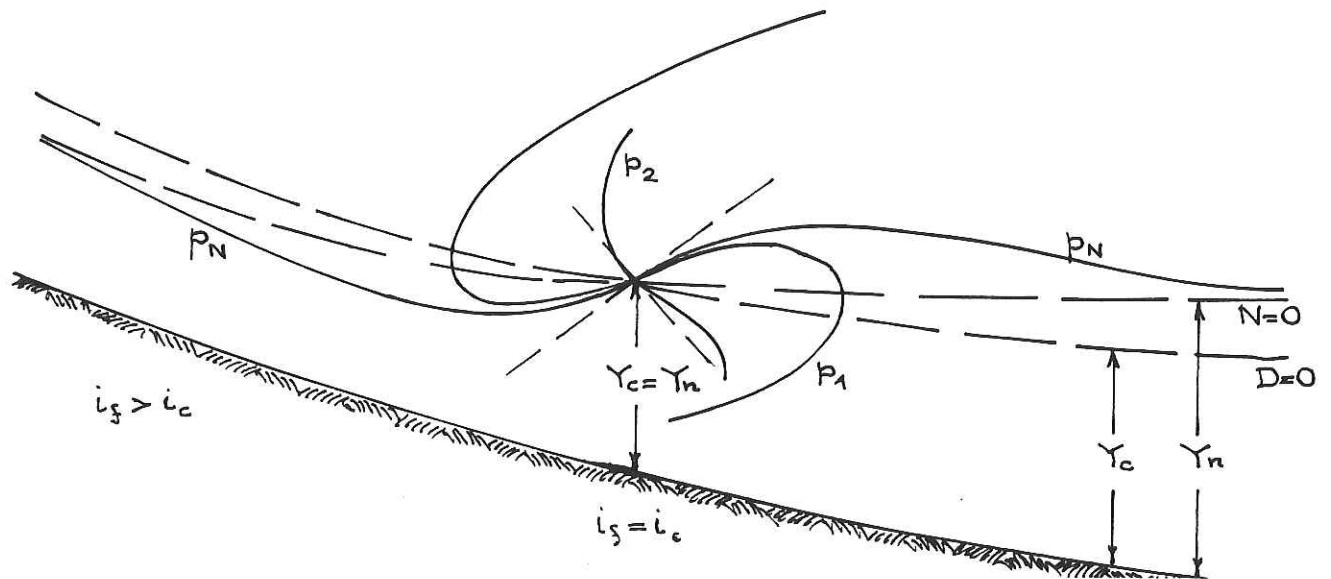


Figura 3.14:

Fisicamente questo caso corrisponde ad alvei con pendenza decrescente verso valle, con rapidità relativamente modesta, tale cioè che

$$\left| \frac{di_f}{dx} \right| < \frac{3}{4} \frac{i_c^2}{Y_M} \quad (3.2.26)$$

I profili passano tutti per il punto singolare M che attraversano con la stessa pendenza (profili p_1) salvo un profilo che lo attraversa con pendenza contraria (profilo p_2).

Si osservi inoltre che, al contrario del caso precedente dove un ramo di ciascun profilo risultava asintotico alla linea delle profondità normali, in questo caso un solo profilo (indicato con p_N in figura 3.14) tende alla $N = 0$ al crescere della distanza dal punto singolare. Ciò è stato dimostrato da Massè (1938) esaminando il comportamento della (3.2.22) per $|x - x_M| \rightarrow \infty$.

iii) Il caso $\Delta < 0$: *il fuoco*

Fisicamente questo caso corrisponde ancora ad alvei con pendenza decrescente verso valle con rapidità tale che

$$\left| \frac{di_f}{dx} \right| > \frac{3}{4} \frac{i_c^2}{Y_M} \quad (3.2.27)$$

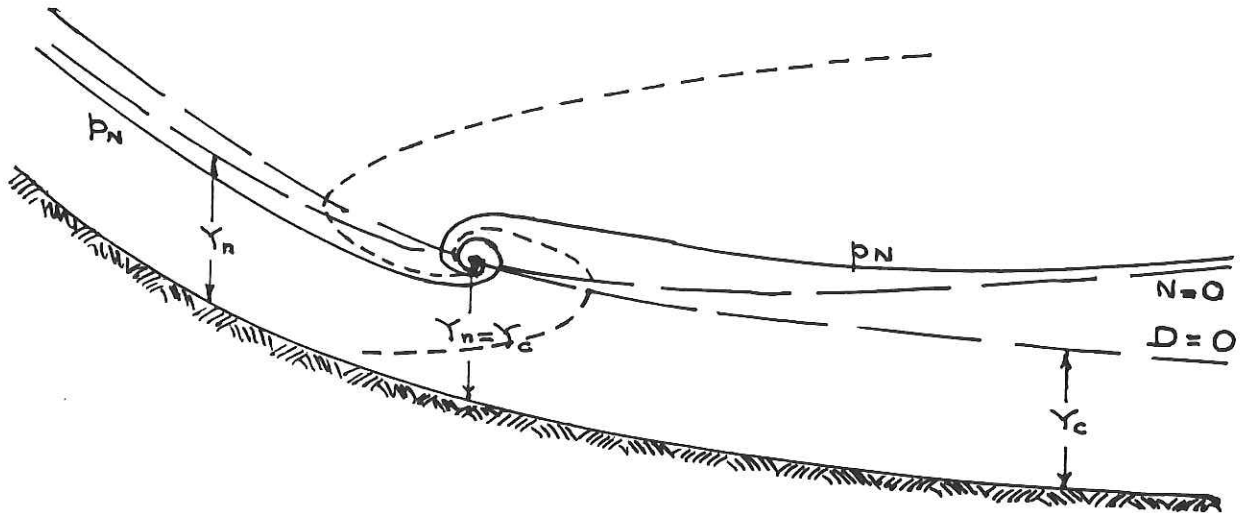


Figura 3.15:

Poiché δ non può che risultare positivo, il punto singolare è un fuoco⁷ (figura 3.15). I profili tendono a raggiungerlo avvolgendosi a spirale intorno a esso (nel senso positivo della trigonometria). Si noti che, nell'intorno di M , i profili sono caratterizzati da curvatura molto grande: la soluzione è cioè incompatibile con lo schema di corrente su cui è fondata. Nella realtà il passaggio da correnti veloci a correnti lente si realizza attraverso una qualche forma di risalto.

Anche in questo caso si dimostra poi l'esistenza di un solo profilo (p_N) asintotico alla linea delle profondità normali.

Concludendo, nel caso di fondo a pendenza variabile con continuità è possibile il passaggio graduale da correnti veloci a correnti lente senza la formazione di un risalto. Solo nel caso di passaggio relativamente brusco, in cui valga cioè la (3.2.24), la soluzione suggerisce la necessità di formazione di una qualche forma di risalto (detto 'di esaurimento' da Massè (1938)). Si noti che, essendo $i_c \simeq 0.3 \div 0.4\%$, la (3.2.27) equivale a una variazione di pendenza non inferiore a 1/1000 per cento metri di corrente.

e Condizioni al contorno per il tracciamento dei profili

Il tracciamento dei profili di rigurgito richiede che all'equazione del moto, nella forma appropriata al tipo di alveo esaminato, vengano associate

⁷La locuzione è 'Strudelpunkt' da 'Strudel' (vortice).



Figura 3.16: Schema di un canale che imbocca da un serbatoio

opportune condizioni al contorno che definiscono lo stato della corrente in corrispondenza di sezioni di estremità o di controllo per la corrente stessa.

Si osservi che, essendo la (3.2.4a) un'equazione del I ordine, una sola condizione al contorno è sufficiente a determinare la soluzione. Se la profondità imposta localmente dalla condizione al contorno risulta inferiore alla profondità critica per la assegnata portata la corrente risulta localmente veloce, sicché l'influenza di tale condizione al contorno non può manifestarsi a monte della sezione di controllo. Vedremo infatti nel capitolo 4 che le 'informazioni' si propagano in una corrente a superficie libera attraverso onde di gravità, la cui celerità, per piccole ampiezze d'onda, coincide con la velocità critica U_c . Dunque lo stato veloce di una corrente rende il profilo condizionabile solo da monte, mentre lo stato lento di una corrente la rende condizionabile anche da valle.

Alcuni esempi tipici di condizioni al contorno che si incontrano comunemente nelle applicazioni sono discussi al punto 3.3.

3.3 Deflusso di correnti cilindriche o quasi-cilindriche in prossimità di sezioni di controllo

a Imbocco da un serbatoio

Consideriamo un canale a sezione rettangolare con pendenza i_f che imbocca da un serbatoio (per esempio un canale di derivazione di un impianto idroelettrico o un canale di irrigazione) (figura 3.16).

$\frac{dH}{dx} = -S$

Il problema che si pone in questo caso è la valutazione della portata Q defluente. Il dato assegnato è infatti il valore del carico specifico E nella sezione iniziale del canale: infatti trascurando le perdite di imbocco, E può assumersi pari al carico effettivo nel serbatoio, riferito al fondo della sezione iniziale del canale.

Posto che qualsiasi opera che esercita da valle un controllo sulla corrente sia localizzata sufficientemente lontano dall'imbocco affinché i suoi effetti non si risentano più in prossimità dell'imbocco stesso, possono presentarsi due casi:

- i) il profilo di valle è uniforme e la corrente è *lenta*;
- ii) il profilo di valle è uniforme e la corrente è *veloce*;

Il realizzarsi dell'una o dell'altra configurazione può essere accertato attraverso il seguente procedimento.

Trascurando le perdite di imbocco la portata può assumere tutti i valori compresi fra 0 e $Q_{\max}|_E$ essendo

altro rettangolo

$$Q_{\max} = bY_c|_E \sqrt{2g(E - Y_c|_E)} \quad (3.3.1)$$

essendo

$$Y_c|_E = \frac{2}{3}E \quad (3.3.2)$$

Il deflusso della portata Q_{\max} in regime uniforme richiede:

- il realizzarsi, nel tronco di valle, di un profilo uniforme con profondità $Y_u|_{Q_{\max}}$;
- il deflusso della corrente attraverso le condizioni critiche nella sezione di imbocco.

Affinché ciò possa avvenire deve dunque verificarsi la condizione

$$Y_u|_{Q_{\max}} < Y_c|_E = Y_c|_{Q_{\max}} \quad (3.3.3)$$

Dunque la corrente uniforme di valle deve risultare *veloce*. In tal caso si realizza il profilo di figura 3.17.

Si noti che la pendenza minima affinché possa realizzarsi la condizione (3.3.3) è la pendenza critica associata alla portata $Q_{\max}|_E$. Un aumento di i_f oltre il valore $i_c|_{Q_{\max}}$ non dà luogo ad alcun incremento della portata derivabile dal bacino.

$Q_{\max} = \frac{2}{3} b E \sqrt{2g \frac{E}{3}} =$
 $Q_{\max} = 0.385 b E \sqrt{2gE}$

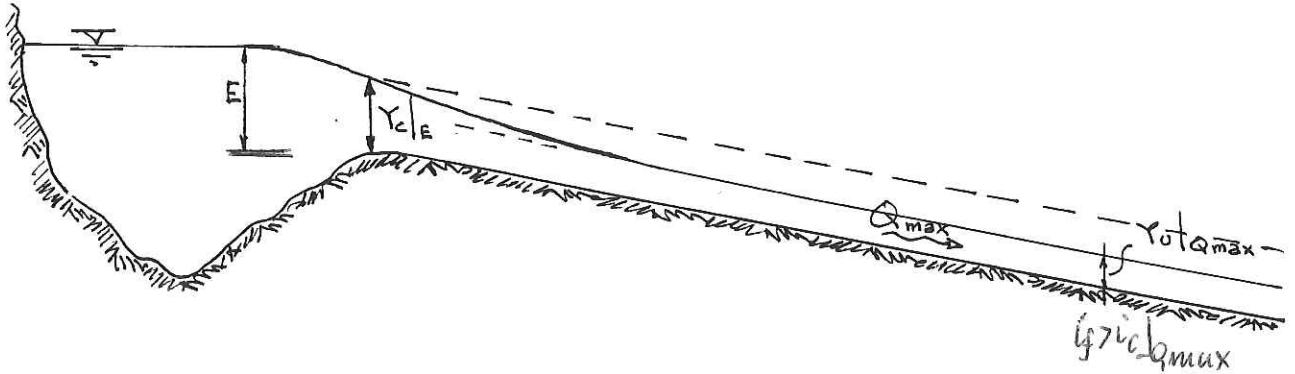


Figura 3.17:

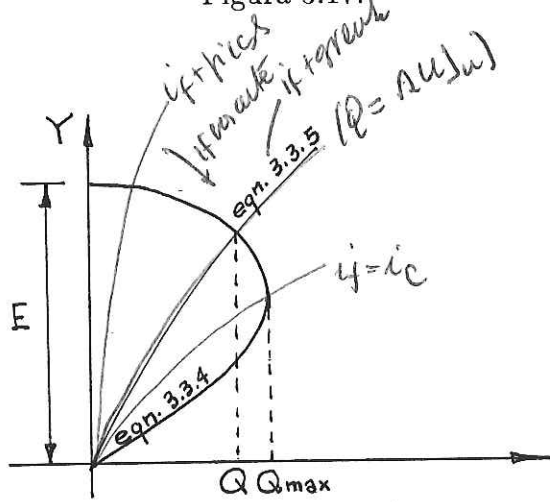


Figura 3.18:

→ + curve i_f , + intersezione
 in spita verso punt
 lutto -
 Max Q , + forte la E nella
 zona iniziale, n'ha
 quanto il moto uniforme
 nel canale avviene su $Y = Y_{c|E}$
 ovvero punto $i_f = i_c$ $\frac{Y_{c|E}}{Q_{max}}$

Se la condizione (3.3.3) non è verificata la portata derivabile Q risulta inferiore a Q_{max} . In tal caso il profilo di valle è necessariamente di corrente lenta. Infatti, al diminuire della portata la profondità critica decresce più rapidamente della profondità di moto uniforme, sicché, se la corrente caratterizzata da $Q = Q_{max|E}$ è lenta, a maggior ragione lo sarà la corrente effettiva che è caratterizzata da un valore della portata inferiore a $Q_{max|E}$.

Al fine di determinare Q occorre semplicemente imporre simultaneamente le condizioni

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E-y)}$$

$$E = Y_u|Q + \frac{Q^2}{2g[\Omega(Y_u)]^2} \quad (3.3.4)$$

$$Q = [C\Omega\sqrt{gR_i i_f}]_{Y_u} \quad (3.3.5)$$

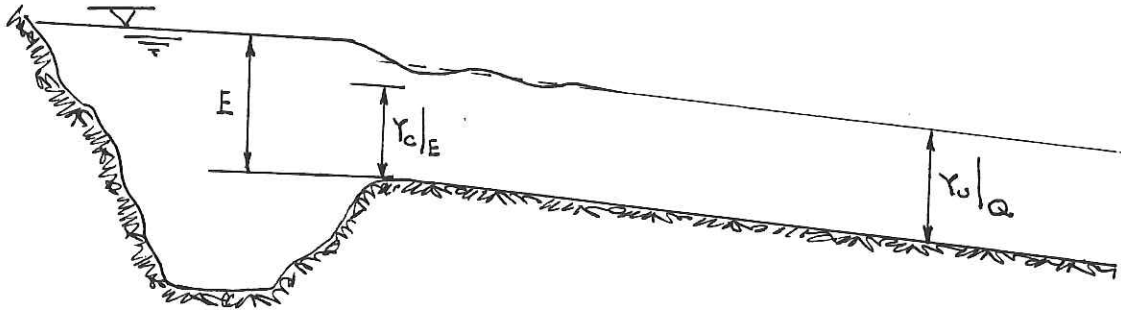


Figura 3.19:

L'intersezione delle due curve (3.3.4) e (3.3.5) determina il valore della portata Q e della profondità Y_u di moto uniforme che si realizzano nel profilo di valle (figura 3.18).

L'assetto del profilo è quello di figura 3.19.

Si noti che, in questo secondo caso, la portata derivata cresce al crescere della pendenza dell'alveo, fino a raggiungere il valore Q_{\max} per $i_f = i_c|_{Q_{\max}}$.

Naturalmente, in presenza di un controllo da valle il problema va risolto per tentativi variando la portata e costruendo il relativo profilo fino a verificare la condizione sul valore di E nella sezione di ingresso.

Si noti, infine, che la perdita localizzata di energia, dovuta all'imbocco, può porsi nella forma:

$$\Delta E = \xi \frac{U^2}{2g}$$

essendo U la velocità di moto uniforme nel canale. Può porsi (Ghetti, 1981).

- $\xi = 0.5 - 0.6$ imbocco a spigolo vivo sul fondo e sui lati
- $\xi = 0.3 - 0.4$ imbocco a spigolo vivo sul fondo, arrotondato sui lati
- $\xi = 0.06 - 0.1$ imbocco a convergente ben sagomato

b Sbocco in un serbatoio o in un bacino

Nel caso fluviale in prossimità della sezione di sbocco si realizza la profondità critica se lo sbocco è libero; se viceversa il livello imposto dal corpo idrico recipiente risulta superiore alla quota imposta dalla profondità critica, il profilo imposto a monte è di corrente lenta, dunque del tipo f_1, f_u o f_2 (figura 3.20)

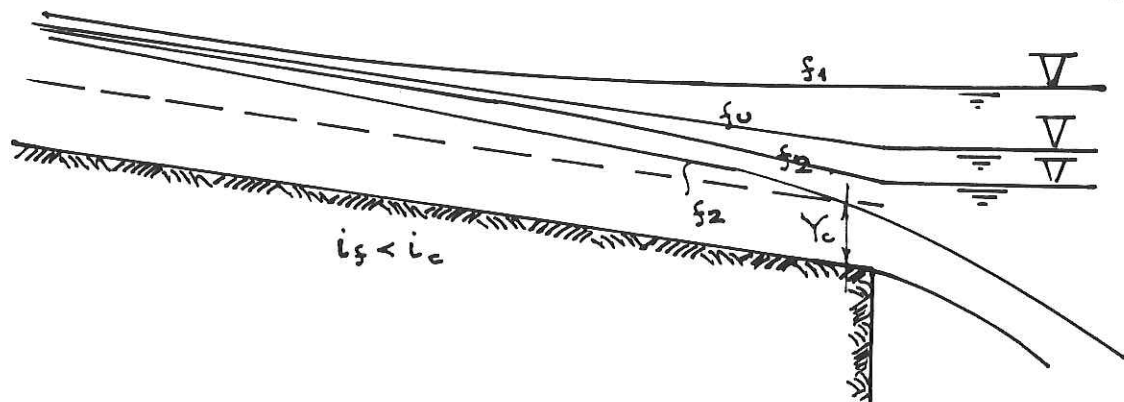


Figura 3.20:

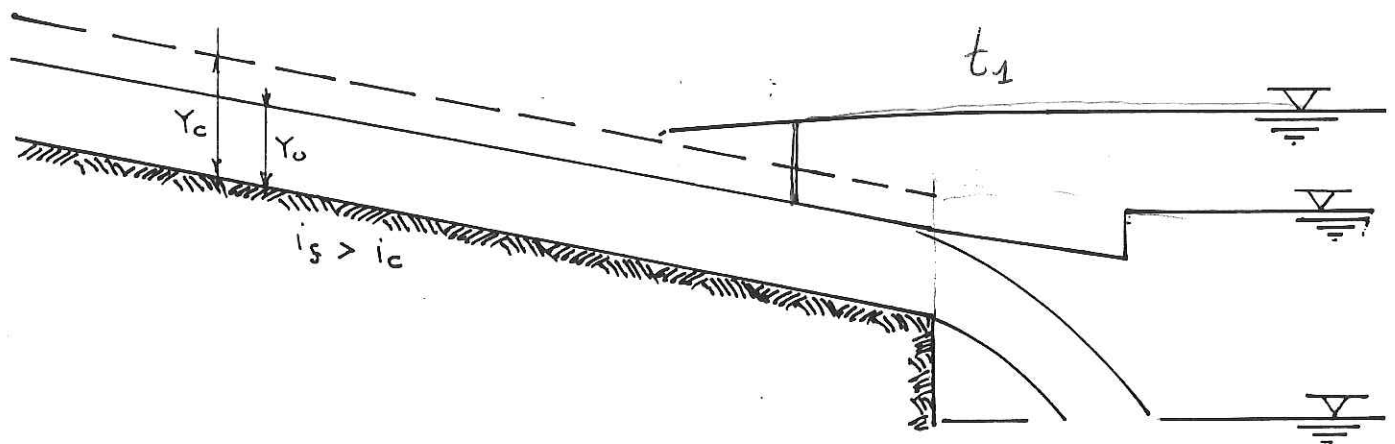


Figura 3.21:

Nel caso torrentizio lo sbocco non influenza il profilo di monte se il livello del corpo idrico recipiente è inferiore alla quota imposta dalla profondità critica nella sezione di sbocco, mentre dà luogo a un profilo del tipo t_1 in caso contrario (figura 3.21). In quest'ultimo caso la corrente lenta di valle si collega al profilo uniforme veloce di monte attraverso un risalto.

c Deflusso in prossimità di sfiori

● Stramazzi

Gli *stramazzi* sono luci a battente nullo, nelle quali cioè il bordo superiore della luce è assente o non interagisce con la vena effluente.

In prossimità di uno stramazzo si ha un progressivo abbassamento del pelo libero (chiamata allo sbocco) sicché il *carico* h cui lo stramazzo è soggetto, è definito come quota della superficie libera rispetto alla soglia dello stramazzo, misurata sufficientemente lontano dallo stesso (distanza pari a circa $3-4 h_0$) affinché sia assente o trascurabile l'effetto della chiamata allo sbocco.

Consideriamo anzitutto stramazzi *liberi*, il cui deflusso non risulta cioè condizionato dalle caratteristiche del deflusso di valle. Il carattere libero dello stramazzo richiede che il livello di valle risulti più basso della quota della soglia dello stramazzo e che inoltri la vena sia *areata* sufficientemente affinché la pressione si mantenga atmosferica anche sulla parte inferiore della vena.

i) Stramazzi in parete sottile

Lo stramazzo in parete sottile può considerarsi come uno strumento di misura della portata di una corrente idrica fra i più precisi.

- Stramazzo rettangolare senza contrazione laterale

In questo caso la luce, rettangolare di larghezza b , occupa l'intera larghezza del canale, sicché la contrazione della vena si realizza solo sui piani verticali.

L'assetto dello stramazzo nel canale deve rispettare alcuni criteri, precisati dalle norme UNI (fig. 3.22).

- i) canale a fondo piano di lunghezza $\geq 20h$ *e > 3b*
 ii) soglia di spessore 2 mm, smussata a valle.

La valutazione della portata defluente da stramazzi di questo tipo è stata oggetto di ricerca prevalentemente sperimentale, a partire dall'opera di Poleni. Il contributo più rilevante è tuttavia quello di Bazin (1898) al quale viene associato tale tipo di stramazzo. La valutazione della portata defluente attraverso lo stramazzo può eseguirsi utilizzando la relazione

$$Q = c_Q b h \sqrt{2gh} \quad (3.3.6)$$

con c_Q coefficiente di portata per la valutazione del quale sono disponibili numerose formule empiriche.

Bazin (1898), sulla base di sue esperienze, propose la seguente relazione:

$$c_Q = \left(0.405 + \frac{0.003}{h} \right) \left[1 + 0.55 \left(\frac{h}{h+d} \right)^2 \right] \quad (0.1m \leq h \leq 0.6m) \quad (3.3.7)$$

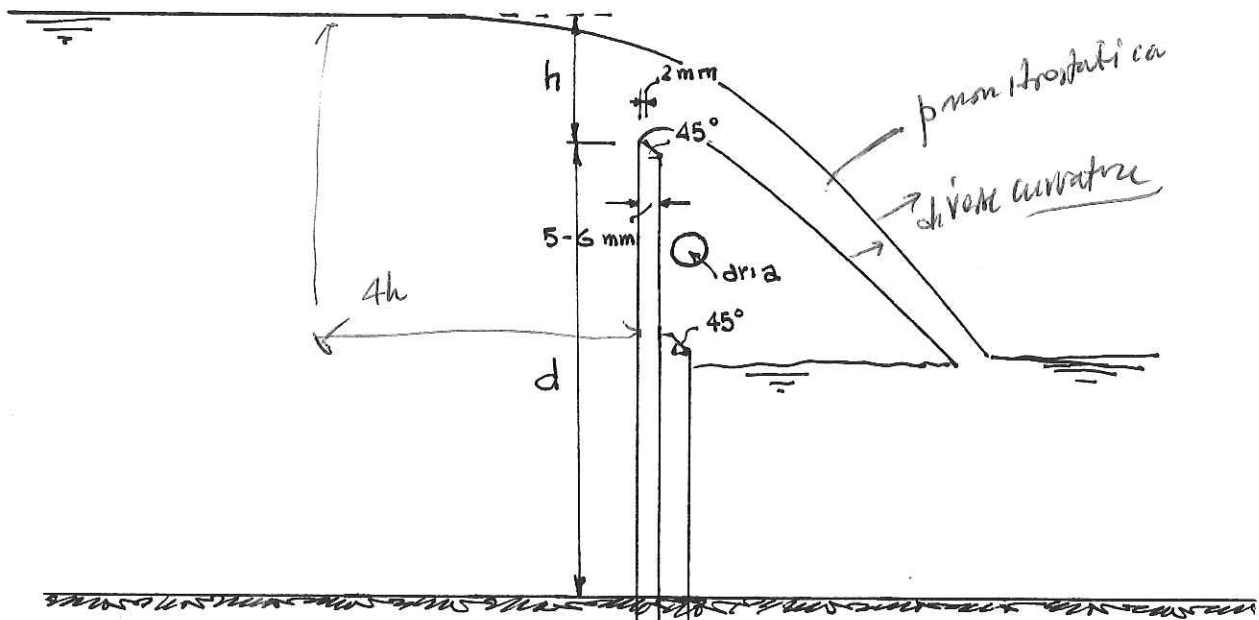


Figura 3.22: Stramazzo in parete sottile tipo Bazin.

con h e d in metri.

Nella (3.3.7) il termine in $(h/h+d)^2$ tiene conto dell'influenza che l'altezza d dello stramazzo esercita sulla contrazione della vena, mentre il termine $0.003/h$ (significativo per i valori più bassi di h) si riferisce all'effetto della tensione superficiale che tende ad abbassare il profilo inferiore della vena aumentando il coefficiente di portata.

Ulteriore relazione empirica è dovuta a Rehbock (1929) ed è fondata su esperienze di numerosi Autori:

$$c_Q = \left[0.4023 + 0.0542 \frac{h}{d} \left(1 + \frac{0.0011}{h} \right) \right] \left[1 + \frac{0.0011}{h} \right]^{3/2} \quad (0.01m < h < 0.8m) \quad (3.3.8)$$

con h e d in metri.

Le (3.3.7), (3.3.8) forniscono valori che differiscono fra loro in misura crescente dall'1% circa per i valori maggiori di h fino al 5% circa per $h \approx 0.1m$. Le discrepanze sono in parte dovute ad errori di misura, in parte alla diversa configurazione delle apparecchiature sperimentali.

Non sfugga, poi, al lettore il carattere relativamente rudimentale delle (3.3.7) e (3.3.8). In esse l'effetto della tensione superficiale viene introdotto

(fanno in
sui K relativi
in amro
del canale)

(fanno a $h \approx 0.2m$)

del testo

Bazin
20/11/1911

$$\frac{0.001}{h} = \frac{K}{We} \rightarrow K = We \cdot \frac{0.001}{h} = \frac{\sqrt{2\rho g} \cdot 0.001}{\sqrt{\sigma}} = 0.52\rho$$

$\sigma = 0.076 \text{ Kg/m}^2 \text{ per H}_2\text{O}$

Canali "livi" in cui la costante $\alpha k = \text{cost}$ oppure volta che da σ , l'ipotesi della σ

$$\frac{\rho v^2 l^2}{\sigma l} = \frac{\rho v^2}{\frac{\sigma}{l}}$$

oppure $\frac{v}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho h}}} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{\frac{\sigma}{\rho h}}} = \frac{\sqrt{2g\rho \cdot h}}{\sqrt{\sigma}} = We$

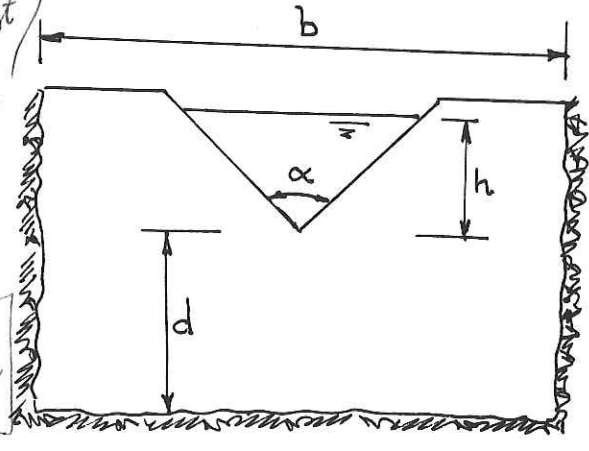


Figura 3.23: Schema di stramazzo triangolare.

in forma dimensionale anziché attraverso la presenza del parametro adimensionale numero di Weber We definito nella forma $\rho v^2 l / \sigma$ con v ed l velocità e lunghezza assunte come caratteristiche per il deflusso in esame (ad esempio $l = h$ e $v = \sqrt{2gh}$).

- Stramazzi con contrazione laterale

Per la misura accurata di piccole portate è conveniente l'uso di *stramazzi triangolari* con vertice in basso. L'angolo al vertice è tipicamente pari a 90° (figura 3.23).

La relazione adottabile per la valutazione della portata è la seguente:

$$Q = \frac{8}{15} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} c_c \sqrt{2g} h^{5/2} \quad (h \geq 0.06m, d < 0.1m) \quad (3.3.9)$$

con c coefficiente di contrazione valutabile per mezzo del diagramma in figura 3.24 proposto da Shen (1960).

Si consiglia di porre nella formula, in luogo di h , la quantità $(h + 0.00085)$ in m.

Un ulteriore tipo di stramazzo utilizzato frequentemente è lo *stramazzo rettangolare con contrazione laterale* (figura 3.25).

Per la valutazione della portata si può adottare qui la formula proposta da Francis (1893)

$$Q = 0.41 l' \sqrt{2gh}^{3/2} \quad (3.3.10)$$

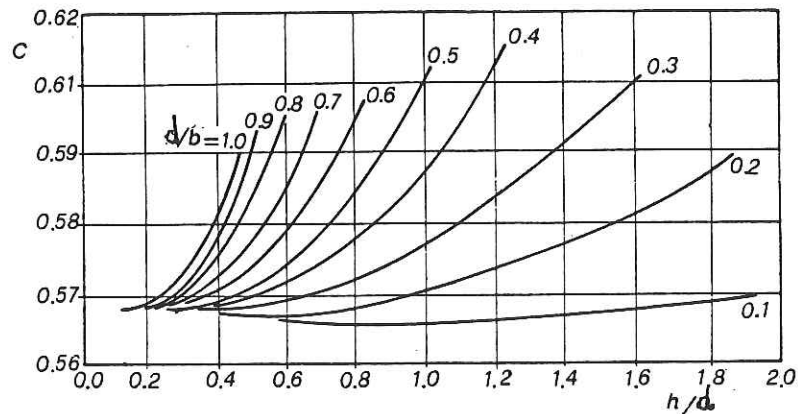


Figura 3.24: Grafico di Shen (1960) per la valutazione del coefficiente di contrazione di stramazzi triangolari.

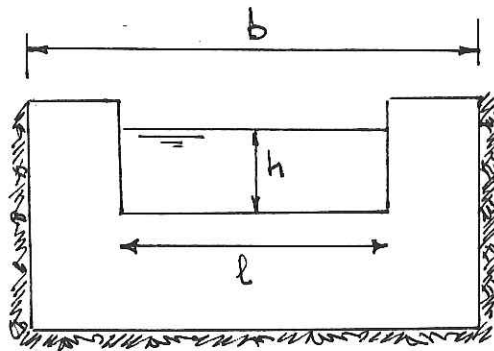


Figura 3.25: Schema di stramazzo rettangolare con contrazione laterale.

con ℓ' larghezza ridotta della luce che mette conto dell'effetto della contrazione laterale nella forma

$$\ell' = \ell - 0.1nh \quad (3.3.11)$$

con $n(= 1, 2)$ numero dei lati su cui avviene la contrazione laterale.

Ulteriore relazione è quella proposta da Kindsvater & Carter (1959)

$$Q = c_Q \sqrt{2gl_e} h_e^{3/2} \quad (3.3.12)$$

con c_Q coefficiente di portata valutabile attraverso il grafico di figura 3.26, h_e carico efficace pari ad $(h + 0.001)$ m ed $\ell_e = \ell + k_b$ con k_b rappresentato in figura 3.27.

Applicabile con il basin
+ limitaria $\frac{b-l}{2} > 0.1m$

$$C_q = C_q(l/b, h/d)$$

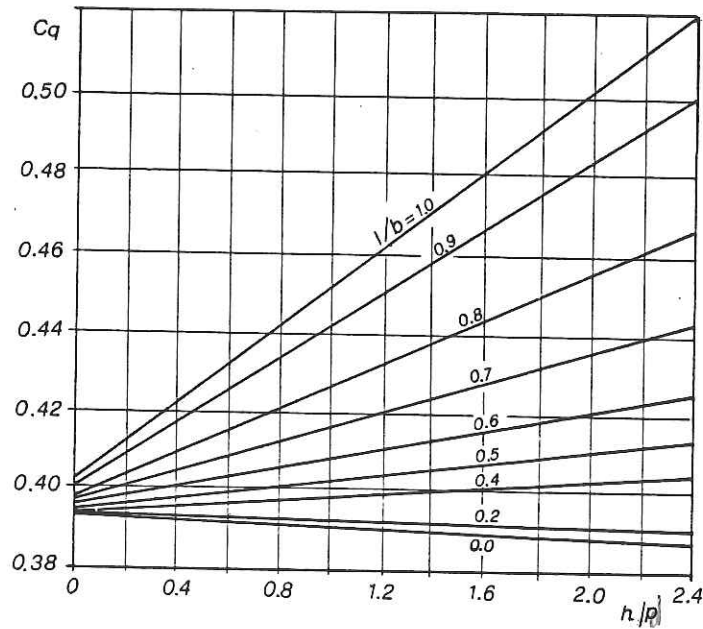


Figura 3.26: Il coefficiente di deflusso c_q per stramazzi rettangolari con contrazione laterale.

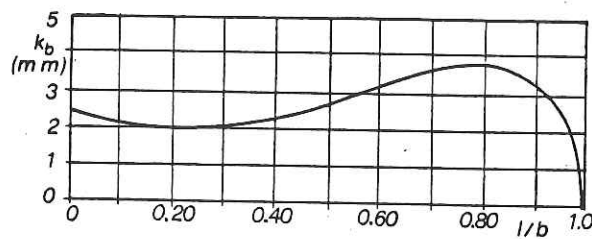
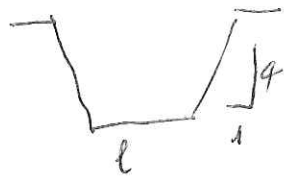


Figura 3.27: Fattore correttivo della larghezza della luce per stramazzi rettangolari con contrazione laterale.

Cipolletti



$$Q = 0.41 \ell h \sqrt{2gh} ?$$

3.3. Deflusso di correnti cilindriche o quasi-cilindriche in prossimità di sezioni di controllo

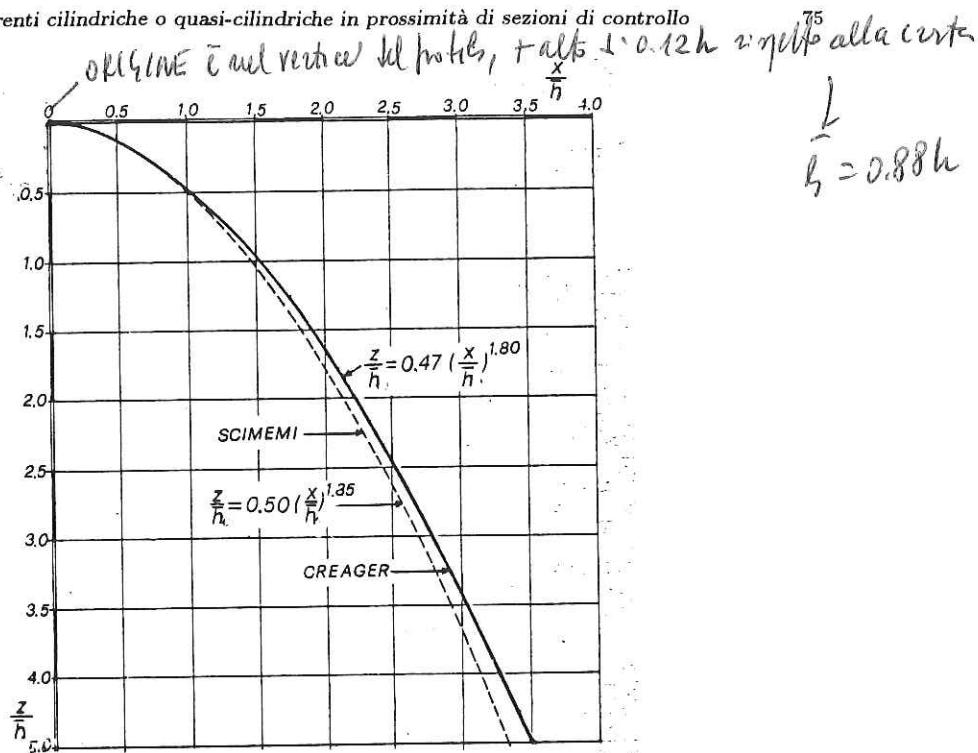


Figura 3.28: I profili di sfioro di Creager (1917) e Scimemi (1930).

• Soglie di sfioro

Il profilo da assegnare ad una soglia di sfioro, in modo tale da minimizzare le dimensioni dello sfioratore, è il profilo inferiore assunto dalla vena liquida sfiorante da uno stramazzone in parete sottile. Ciò consente di evitare che la vena si distacchi dalla parete. Il dimensionamento andrà naturalmente eseguito con riferimento al massimo carico prevedibile sulla soglia dello sfioratore, affinché la vena eserciti pressioni positive sulla parete in ogni condizione di funzionamento.

L'andamento del profilo è stato determinato sperimentalmente da numerosi autori e, in particolare, da Creager (1917) e Scimemi (1930, 1946). Con le notazioni della figura 3.28 tali profili assumono la forma analitica seguente

$$\frac{z}{h} = m \left(\frac{x}{h} \right)^n \quad \begin{matrix} m = 0.5 & n = 1.85 & \text{(Scimemi, 1930)} \\ m = 0.47 & n = 1.80 & \text{(Creager, 1917)} \end{matrix} \quad (3.3.13)$$

essendo $\bar{h} = 0.88h$ il carico sulla soglia.

La portata defluente è legata ad \bar{h} attraverso la relazione

$$q = c_Q h \sqrt{2gh} = c'_Q \bar{h} \sqrt{2g\bar{h}} \quad (3.3.14)$$

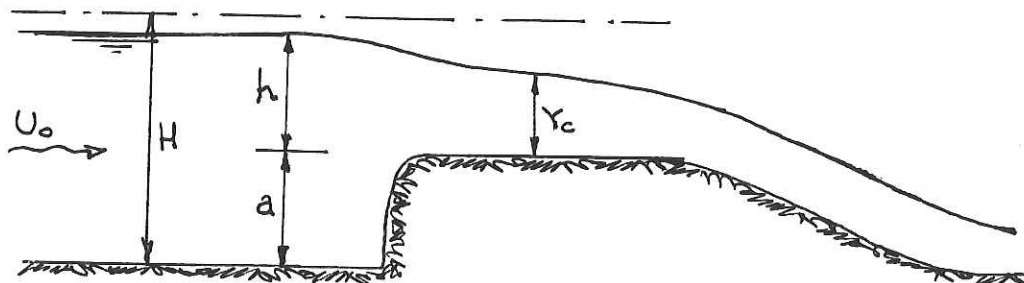


Figura 3.29: Schema di uno stramazzo Bélanger.

dove

$$c_Q = 0.41 \quad c'_Q = 0.5 \quad (3.3.15a, b)$$

Tali valori dei coefficienti di portata sono adeguati per il funzionamento relativo alle condizioni di carico per le quali il profilo è stato dimensionato. Per valori di h inferiori i valori di c_Q e c'_Q tendono ad aumentare.

• *Stramazzi a soglia lunga* (Bélanger, 1849)

Nel caso di stramazzi a soglia sufficientemente lunga affinché la corrente raggiunga le condizioni critiche in un tratto in cui il moto possa sensibilmente approssimarsi come parallelo, poste trascurabili le dissipazioni di energia (approssimazione lecita nel caso di bordo anteriore arrotondato), con le notazioni di figura 3.29 si ha

$$Y_c = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}(H - a) = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (3.3.16)$$

carico limite = $h + h^2/3y$

segue

$$q = \left[\left(\frac{2}{3} \right)^3 g \right]^{1/2} (H - a)^{3/2} \quad (3.3.17)$$

dove

$$q = 0.385(H - a)\sqrt{2g(H - a)} \quad (3.3.18)$$

La portata unitaria risulta quindi lievemente inferiore alla corrispondente portata per lo stramazzo in parete sottile.

Trascurando il carico cinetico della corrente di monte si può porre $H - a \simeq h$ e la (3.3.18) diventa

$$q = 0.385h^{3/2}\sqrt{2g} \quad (3.3.19)$$

*Stamma non possibile
ai natura delle H e h =
depona nelle vena,
+ Q*

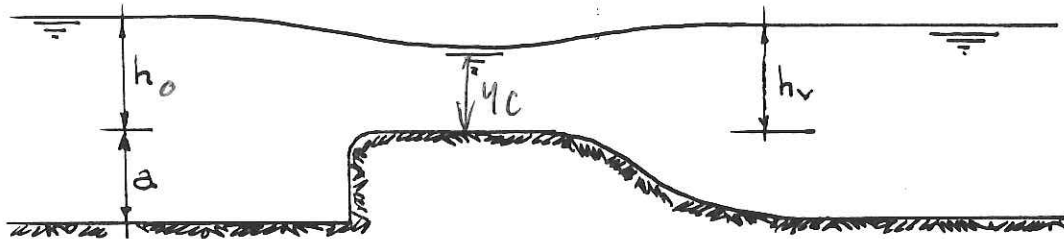


Figura 3.30:

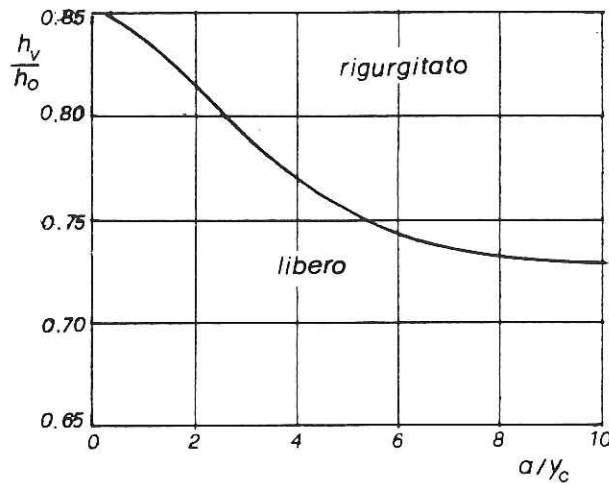
(SCHETTI,
PAG. 412)

Figura 3.31:

- *Stramazzi rigurgitati*

Lo stramazzo è *libero* se, essendo la corrente lenta a monte, si ha deflusso attraverso le condizioni critiche sulla traversa sicché la corrente diventa veloce a valle, almeno in un primo tratto.

Per il caso di stramazzi a soglia lunga le condizioni per il passaggio dal deflusso libero a quello rigurgitato sono state teoricamente individuate da Schmidt (1954, figura 3.30) in funzione dei valori assunti dai parametri h_v/h_0 ed a/y_c , il cui significato emerge dalla figura 3.31

In presenza di rigurgito la portata unitaria defluente q è ancora correlata con h attraverso la (3.3.6) ma il coefficiente di portata va corretto

$$q = C_R h_0 \sqrt{g h_0}$$

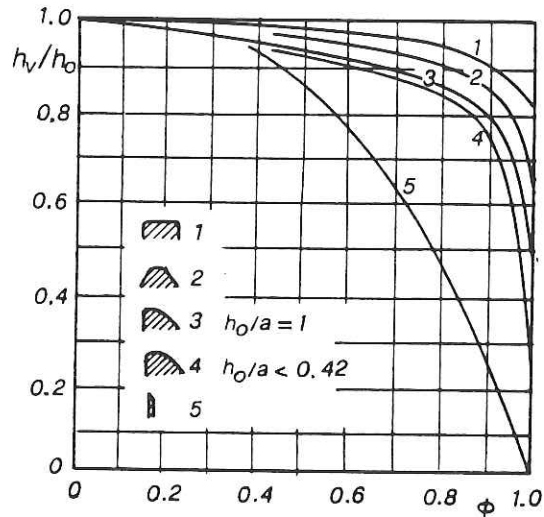


Figura 3.32:

empiricamente nella forma

$$c'_Q = \phi c_Q$$

con ϕ coefficiente correttivo che dipende dal rapporto h_v/h_0 e dalla forma dello stramazzo. Valori di ϕ per diverse forme della soglia sono riportate in figura 3.32.

• *Deflusso in prossimità di traverse*

Il tipo di deflusso indotto dalla presenza di traverse in un canale a fondo fisso dipende, per assegnata portata:

- dalle caratteristiche dell'alveo (fluviale, torrentizio);
- dalle dimensioni della soglia.

Assumiamo per semplicità il canale a sezione rettangolare molto larga e sia q la portata per unità di larghezza. In tal caso è conveniente distinguere due casi.

i) *Il caso di traverse a soglia bassa*

La soglia può ritenersi *bassa* se la corrente è in grado di defluire su di essa senza attraversare lo stato critico. Occorre qui distinguere due sottocasi.

- *L'alveo è fluviale (figura 3.33)*

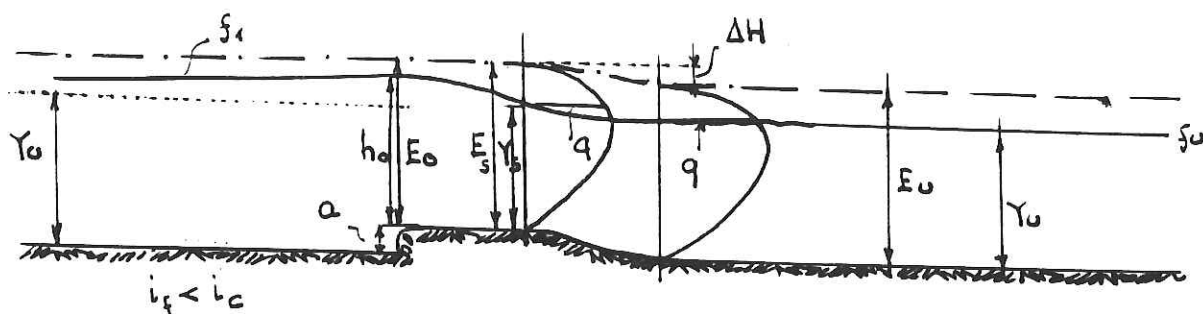


Figura 3.33: Stramazzo Bélanger rigurgitato.

In tal caso, in assenza di controlli di valle, il profilo si presenta a valle della traversa come uniforme, con carico specifico E_u . Il carico specifico sulla soglia è ridotto rispetto ad E_u per l'innalzamento a imposto dalla soglia, ma accresciuto della perdita di carico ΔH che la corrente subisce nel tratto subito a valle della soglia dove si ha un sensibile rallentamento. Segue:

$$E_s = E_u - a + \Delta H \quad (3.3.20)$$

Stimando ΔH , per esempio nella forma $(U_s - U_u)^2/2g$, cioè:

$$\Delta H = \frac{q^2}{2gY_u^2} \left(\frac{Y_u}{Y_s} - 1 \right)^2 \quad (3.3.21)$$

ed essendo

$$E_s = Y_s + \frac{q^2}{2gY_s^2} \quad (3.3.22)$$

La (3.3.20) fornisce un'equazione cubica per Y_s che può essere risolta agevolmente. La soglia è bassa se la soluzione per Y_s è tale da soddisfare la condizione

$$Y_s > \frac{2}{3} E_s \quad (3.3.23)$$

In tal caso il deflusso avviene senza passaggio attraverso le condizioni critiche. Il carico di monte si ottiene agevolmente trascurando le dissipazioni nel tronco accelerato, dunque imponendo che risulti $E_o = E_s$. Il profilo che si realizza a monte è del tipo f_1 e tende quindi a ripristinare più a monte il

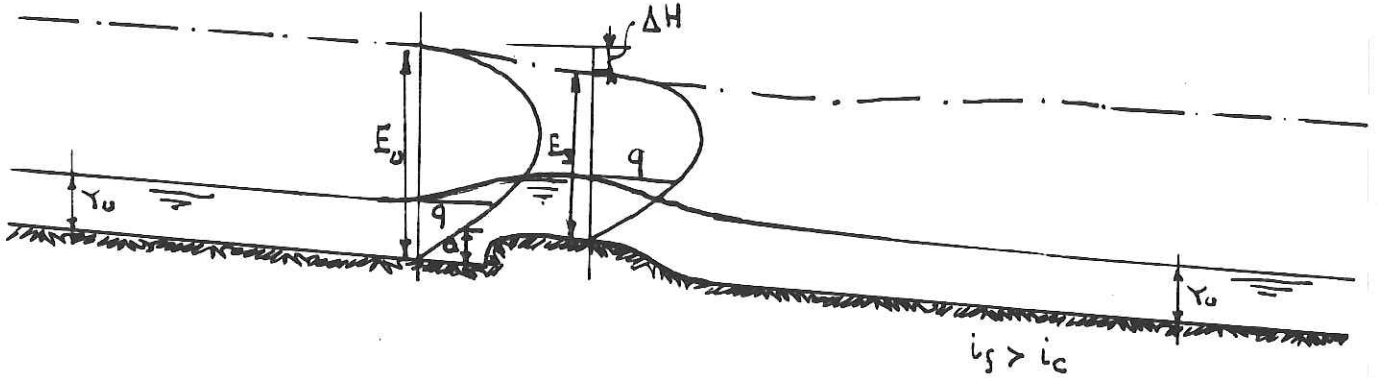


Figura 3.34:

profilo uniforme.

- L'alveo è torrentizio (figura 3.34)

In questo caso la verifica del carattere 'basso' della soglia procede da monte. Si ha:

$$E_s = E_u - a - \Delta H$$

La soglia è bassa se si trova

$$Y_s < \frac{2}{3} E_s$$

Il procedimento è quindi analogo a quello relativo al caso fluviale. In questo caso la corrente si mantiene ovunque veloce e il profilo uniforme viene ripristinato a valle.

ii) Il caso di traverse a soglia elevata

Se la soglia è elevata la corrente non è in grado di defluire sulla soglia con i valori del carico specifico imposti dal profilo uniforme (di valle o di monte). La corrente deve cioè risparmiare energia al fine di presentarsi alla soglia con il minimo carico specifico sufficiente al deflusso della portata unitaria q sulla soglia stessa. Si realizza dunque il passaggio attraverso le condizioni critiche sulla soglia, un innalzamento di livello a monte e l'instaurarsi di un profilo del tipo f_1 nel caso fluviale, t_1 nel caso torrentizio cui corrisponde una riduzione di perdite rispetto ai profili previsti nel caso di soglia bassa.

Le configurazioni che si presentano sono rappresentate nelle figure 3.35 e 3.36.

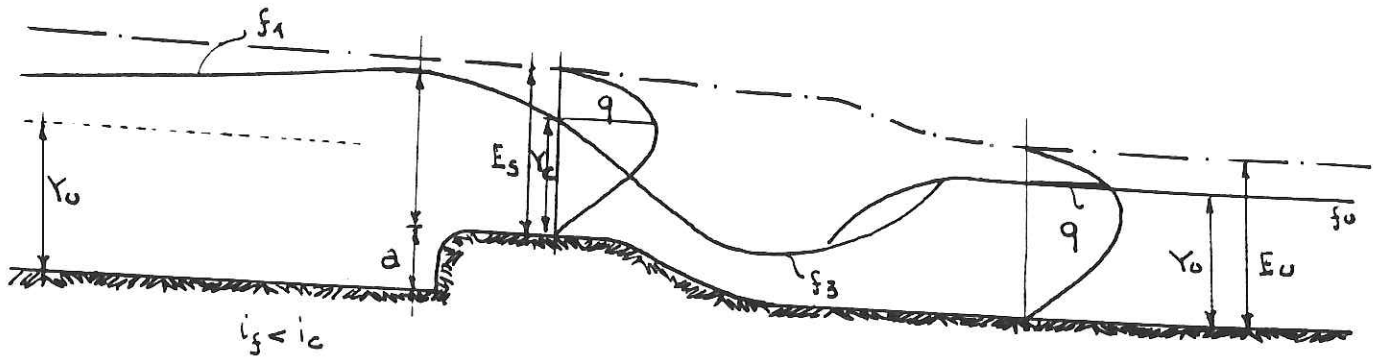


Figura 3.35:

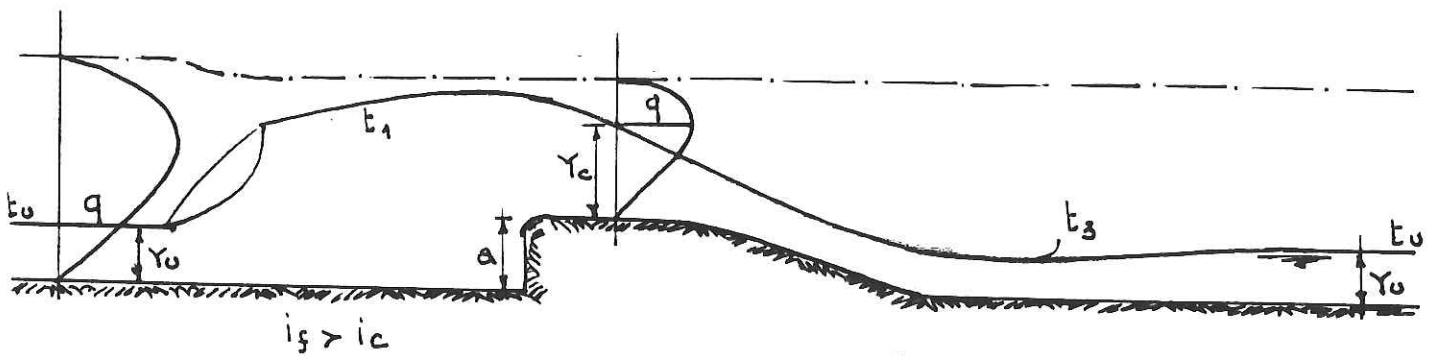


Figura 3.36:

In entrambi i casi si realizza la profondità critica sulla soglia *e*, a monte, la profondità imposta dalla (3.3.19). Tale condizione determina, nel caso fluviale un profilo del tipo f_1 che tende a ripristinare il profilo uniforme più a monte; nel caso torrentizio si realizza un profilo del tipo t_1 che più a monte, si collega, attraverso un risalto, al profilo di monte.

A valle, il profilo accelerato determinato dalla soglia determina, al piede della traversa, una profondità che impone a valle un profilo del tipo f_3 nel caso fluviale, del tipo t_3 nel caso torrentizio. In quest'ultimo caso il profilo t_3 tende a ripristinare a valle il profilo uniforme. Nel caso fluviale il profilo f_3 si collega al profilo uniforme attraverso un risalto.

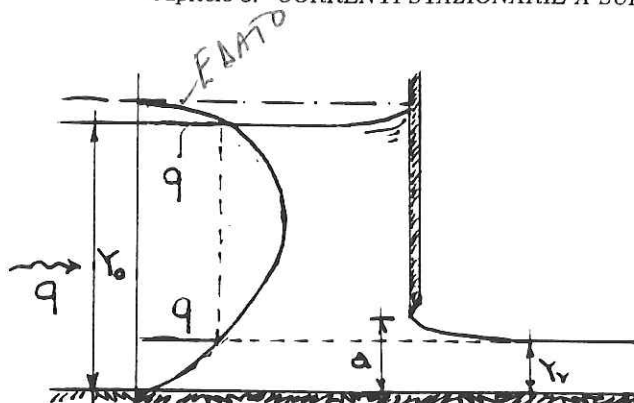


Figura 3.37: Luce di fondo a parete verticale.

d Deflusso attraverso luci di fondo

Una *luce di fondo* è una luce a battente in cui il bordo inferiore coincide con il fondo del canale.

Consideriamo anzitutto il caso di una luce *libera* costituita da una paratoia verticale con bordo inferiore sottile (figura 3.37).

In questo caso l'applicazione del teorema di Bernoulli fra una sezione subito a monte della paratoia e la sezione contratta a valle della paratoia, fornisce:

$$Y_0 + \frac{q^2}{2gY_0^2} = ca + \frac{q^2}{2g(ca)^2}$$

avendo indicato con c il coefficiente di contrazione.

Segue

$$\checkmark \quad q = \frac{ca}{\sqrt{1 + c(a/Y_0)}} \sqrt{2gY_0} = c_Q a \sqrt{2gY_0} \quad (3.3.24)$$

Dunque

$$c_Q = \frac{c}{\sqrt{1 + c(a/Y_0)}} \quad (3.3.25)$$

Il coefficiente di contrazione è stato calcolato da Marchi (1953), assumendo il moto irrotazionale, per paratoie che formano un angolo θ con l'orizzontale. I valori ottenuti sono riportati nella tabella 3.1 in funzione del rapporto Y_0/a . Si noti come nel caso di paratoia verticale il coefficiente di contrazione presenti un minimo per valori di Y_0/a dell'ordine di $3 \div 5$, mentre cresce al diminuire di Y_0/a al di sotto di tali valori. Quest'ultimo caso è di particolare interesse nelle situazioni in cui la presenza di un ponte dà luogo ad un rigurgito che raggiunge in fronte anteriore della struttura.

θ	Y_o/a				
	2	3	5	7	10
90°	0.612	0.605	0.605	0.606	0.607
60°	0.668	0.674	0.682	0.685	0.686
45°	0.715	0.728	0.736	0.740	0.742
30°	0.769	0.795	0.805	0.808	0.809

Tabella 3.1: Il coefficiente di contrazione per una luce di fondo che forma un angolo θ con l'orizzontale (Marchi, 1953).

Esaminiamo ora quale influenza è indotta a monte e a valle della presenza della paratoia che assumeremo verticale.

Assumiamo la portata per unità di larghezza q assegnata e supponiamo di alzare la paratoia a partire da valori piccolissimi di a . Il valore di y_o si ottiene dalla (3.3.24): per dato q , al crescere di a , Y_o diminuisce. Nel caso di alveo fluviale (figura 3.38) la condizione imposta a monte della paratoia dà luogo inizialmente ad un profilo del tipo f_1 , quindi f_u ed infine f_2 . Nel caso di alveo torrentizio (fig. 3.39) il profilo imposto a monte è sempre del tipo t_1 .

Si noti che, essendo la portata assegnata, e dovendo essere soddisfatta la relazione

$$Y_o u_o = q = Y_o \sqrt{2g(E_o - Y_o)} \quad (3.3.26)$$

al crescere di a , si riducono tanto Y_o quanto E_o . Facendo sistema fra le (3.3.24) e (3.3.26) si trova:

$$Y_o = \frac{E_o}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4c_Q^2 a^2}{E_o^2}} \right] \quad (3.3.27)$$

È interessante determinare le condizioni in cui $Y_o \rightarrow Y_c$. È sufficiente porre $Y_o = 2/3 E$ nella (3.3.27); si ottiene:

$$\sqrt{E} = \frac{3}{\sqrt{2}} c_Q a \quad (3.3.28)$$

donde

$$Y_o = Y_c = \frac{2}{3} E = \sqrt{2} c_Q a \quad (3.3.29)$$

$$3.3.24 \quad q = c_Q a \sqrt{2g Y_o} = Y_o \sqrt{2g(E_o - Y_o)} \rightarrow Y_o^2 (E_o - Y_o) = (c_Q a)^2 Y_o \rightarrow$$

$$Y_o [Y_o^2 - E_o Y_o + c_Q^2 a^2] = 0 \quad Y_o = \frac{E_o \pm \sqrt{E_o^2 - 4c_Q^2 a^2}}{2} = \frac{E_o}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4c_Q^2 a^2}{E_o^2}} \right]$$

$$Y_o = \left(\frac{q}{c_Q a} \right)^2 \frac{1}{2g}$$

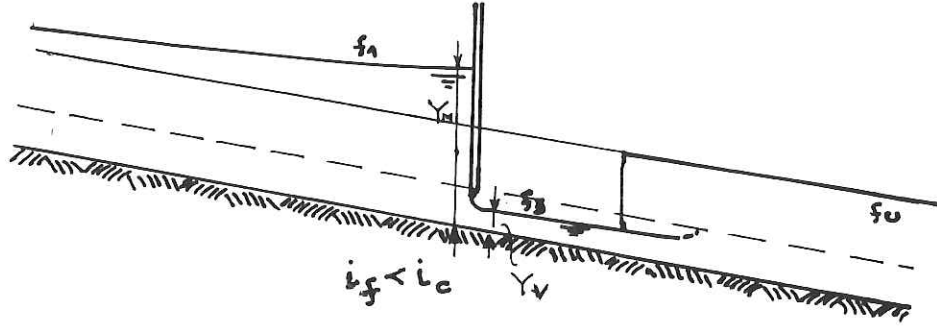


Figura 3.38:

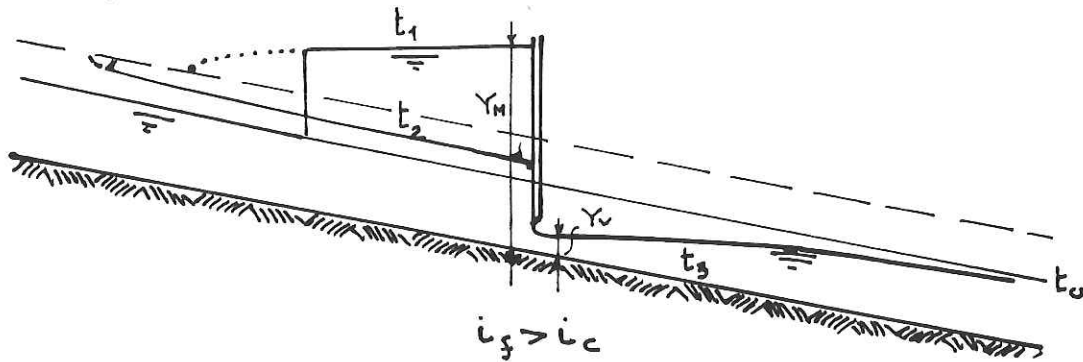


Figura 3.39:

Sostituendo inoltre la (3.3.29) nella (3.3.26) si ottiene un'equazione di II grado per c/c_Q che fornisce quale soluzione

$$c_Q = \frac{c}{1.415} \quad (3.3.30)$$

donde, la (3.3.29) implica che Y_0 dovrebbe risultare inferiore ad a , il che risulta impossibile. Dunque la profondità di monte risulta sempre maggiore di Y_c ed il profilo di monte è sempre di corrente lenta.

Esaminiamo ora l'influenza che la paratoia esercita sul profilo di valle.

Anzitutto va osservato che, posto che il deflusso sia libero, la profondità (ca) nella sezione contratta risulta certamente minore di $Y_{c|q}$. Posto $Y_0 = a$ nella (3.3.27) si ottiene un'equazione per a/E che ha la seguente soluzione

$$\frac{a}{E} = \frac{1}{1 + c_Q^2}$$

minimo di Y_0

$k = Y_0 = \sqrt{1.415} \cdot a \approx 1.72 \cdot a$
 $ca < a$
 più LA

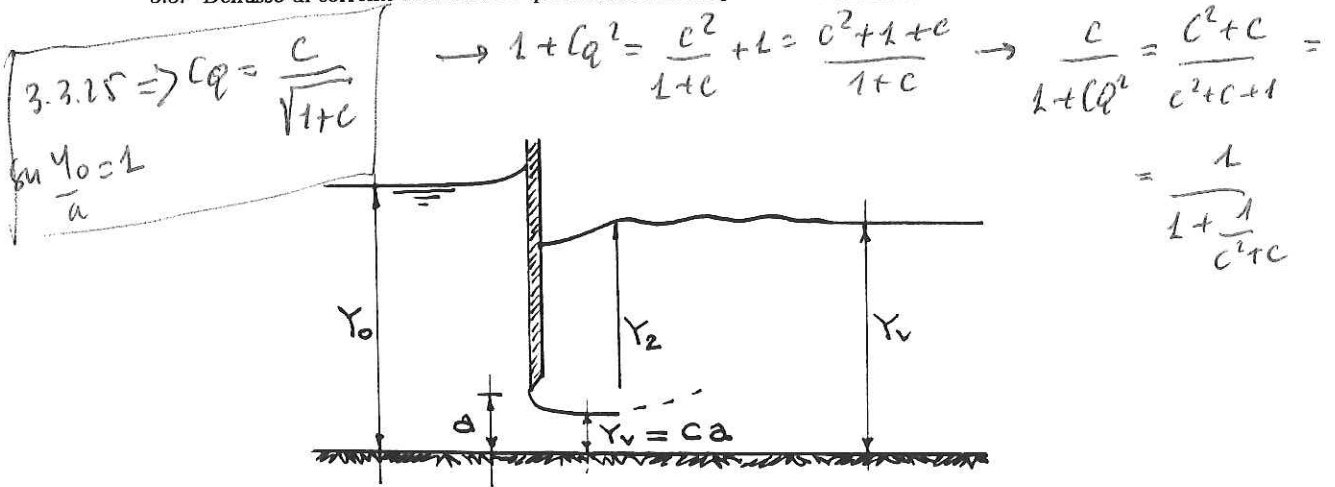


Figura 3.40: Schema di luce di fondo rigurgitata.

mentre la (3.3.25) con $a/Y_0 = 1$ fornisce

$$\frac{c}{1 + c^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c^2 + c}}$$

donde:

$$ca = \left(\frac{c}{1 + c^2} \cdot \frac{3}{2} \right) Y_c = \left[\frac{3}{2} \frac{1}{1 + \frac{1}{c^2 + c}} \right] Y_c < Y_c \quad (3.3.31)$$

Se l'alveo è torrentizio e in assenza di controlli da valle il profilo di valle è del tipo t_3 e tende a ripristinare l'assetto uniforme verso valle.

Se l'alveo è fluviale il profilo veloce di valle (del tipo f_3) s'incontra con la corrente lenta uniforme di valle laddove la profondità del profilo f_3 risulta coniugata della profondità uniforme. Per basse pendenze o in presenza di controlli da valle può verificarsi che la profondità coniugata della profondità uniforme risulti minore di (ca) : in tal caso la paratoia viene rigurgitata da valle (fig. 3.40).

La condizione perché la paratoia risulti rigurgitata si può ricavare approssimando la profondità di valle con la profondità coniugata di $Y_1 = ca$.

Dunque

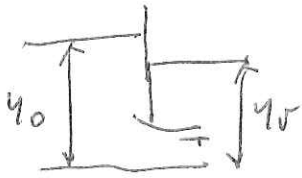
$$\frac{Y_v}{ca} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{1 + 8F_{r1}^2}) \quad (3.3.32a)$$

dove

$$F_{r1}^2 = \frac{q^2}{g(ca)^3} = \frac{2Y_0/a}{c(1 + ca/Y_0)} \quad (3.3.32b)$$

invece si tratta

$$3.32a \quad q = ca \sqrt{g Y_0} \rightarrow \frac{q^2}{g(ca)^3} = \frac{c^2 a^2 2g Y_0}{(1 + \frac{ca}{Y_0}) g (ca)^3} = \frac{2Y_0/a}{c(1 + \frac{ca}{Y_0})}$$



Cinetica Transibile

$$q = C_c a \sqrt{2g(y_0 - y_v)} = a \cdot C_c \sqrt{2g y_0 \left(\frac{y_0 - y_v}{y_0}\right)} \rightarrow C_c = c \sqrt{\frac{y_0 - y_v}{y_0}} \cdot 3.3334$$

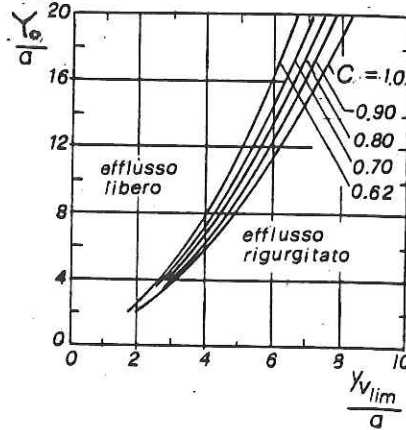


Figura 3.41: Le condizioni per il rigurgito di una paratoia di fondo (per le notazioni si veda la figura 3.40).

Facendo sistema fra le (3.3.32a,b) si trova

$$\left(\frac{Y_v}{a}\right)_c = \frac{c}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{16a^2 Y_0^2 / a^2}{c(c + Y_0/a)}} - 1 \right] \quad (3.3.33)$$

La dipendenza di $(Y_v/a)_c$ da Y_0/a al variare di c è riportata in figura 3.41.

La portata defluente attraverso una luce di fondo rigurgitata può ricavarsi ancora attraverso la (3.3.24), ma il coefficiente di portata c_Q si riduce rispetto al caso di deflusso libero. In figura 3.42 è riportato un diagramma dovuto a H.R. Henry (1948) in cui c_Q risulta funzione di Y_0/a e Y_v/a . Le curve sono fondate su dati sperimentali.

$q = C_c a \sqrt{2g y_0}$

Sono riportate in figura 3.42 anche la curva relativa all'efflusso libero e quella ottenibile per un deflusso rigurgitato quando i carichi cinetici di monte e di valle sono trascurabili. Si trova:

$$c_Q = c \sqrt{\frac{Y_0 - Y_v}{Y_0}} \quad (3.3.34)$$

e L'effetto di restringimenti dell'alveo

Esaminiamo anzitutto il problema del deflusso di una corrente attraverso un brusco restringimento di sezione provocato da un'ostruzione. Ipotizziamo per semplicità l'alveo a sezione rettangolare.

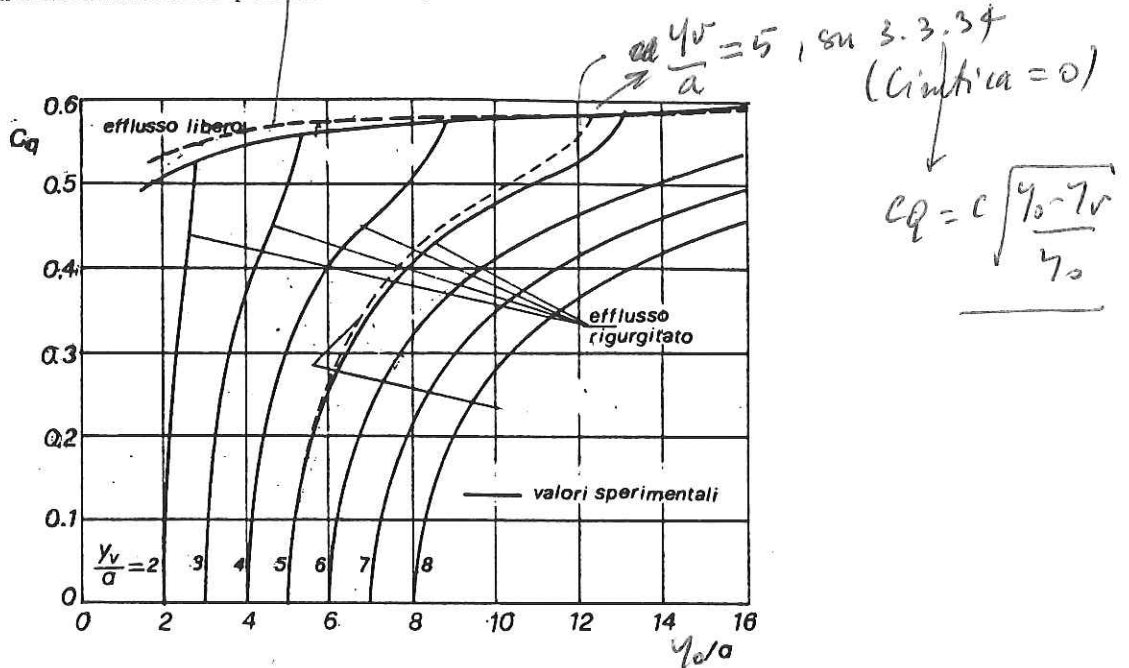


Figura 3.42: Il coefficiente di portata per una luce di fondo rigurgitata.

Occorre qui distinguere diversi casi dipendenti dal carattere della corrente indisturbata e dall'entità del restringimento. La cosa appare chiara se si schematizza il problema come in figura 3.43.

Lo strozzamento provoca un aumento della portata per unità di larghezza da $q_0 (= Q/b_0)$ a $q (= Q/b)$. Assumendo nulle le perdite di carico occorre verificare anzitutto se q risulta minore della massima portata che può defluire con l'assegnato carico E_0 (q_c in figura 3.43). Indicate con il pedice o le condizioni indisturbate e posto $\alpha = 1$, segue:

$$[Y_c]_{E_0} = \frac{2}{3} E_0 = \frac{2}{3} \left(Y_0 + \frac{q_0^2}{2gY_0^2} \right) \quad (3.3.35)$$

$$q_c = \left(\frac{2}{3} E_0 \right)^{3/2} g^{1/2} \quad (3.3.36)$$

Si noti che le condizioni indisturbate si riferiscono alle caratteristiche della corrente subito a monte (a valle) dell'ostruzione se la corrente risulta veloce (o lenta).

La condizione che q risulti minore (uguale) di q_c si scrive dunque

$$q \leq \sqrt{g \left(\frac{2}{3} E_0 \right)^3} \quad (3.3.37)$$

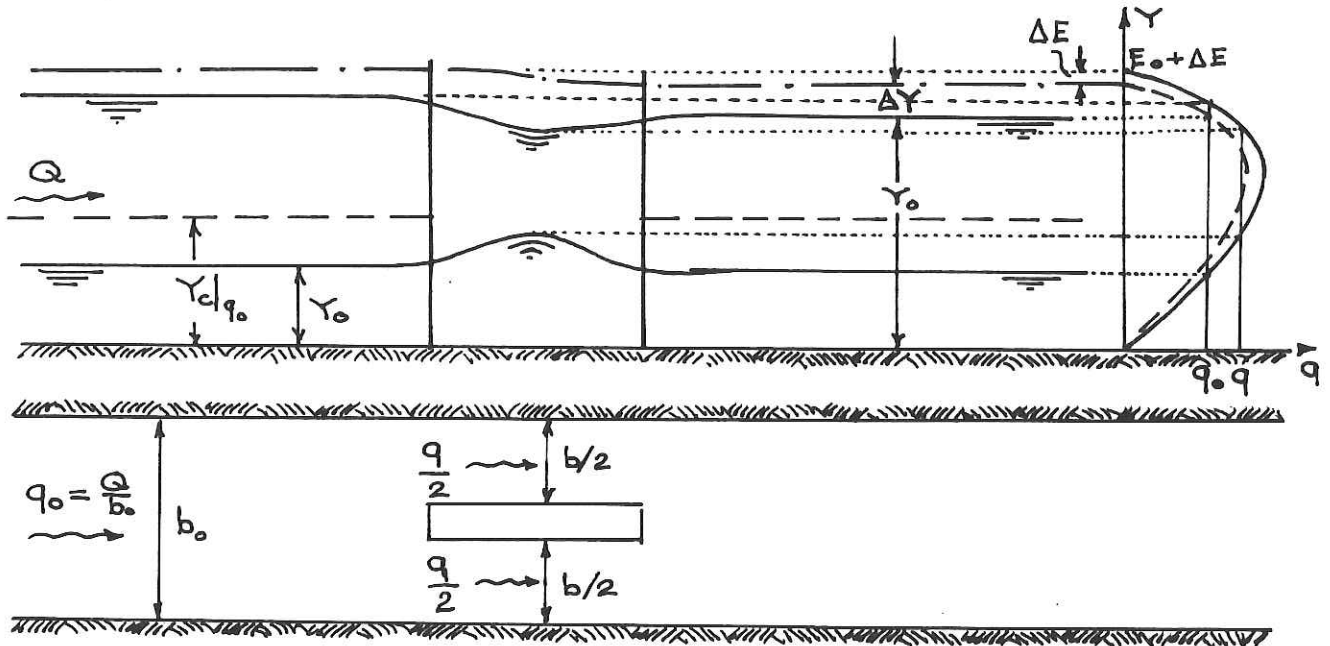


Figura 3.43: Schemi di deflusso in corrispondenza di restringimenti d'alveo.

o

$$E_0 \geq \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} \quad (3.3.38)$$

Se tale condizione è soddisfatta il deflusso della corrente attraverso il tronco ristretto avviene senza l'attraversamento dello stato critico. La (3.3.38) si interpreta facilmente come la condizione che il carico specifico E_0 del moto indisturbato risulti maggiore del carico specifico minimo necessario per il deflusso della portata assegnata nel tronco ristretto, quest'ultimo essendo pari a $3/2$ della profondità critica per l'assegnata portata. L'equivalenza delle condizioni (3.3.37) e (3.3.38) discende dal fatto che la profondità critica per l'assegnato carico E_0 corrisponde al deflusso della massima portata $(q_{\max})_{E_0}$ compatibile con il carico specifico E_0 , ma coincide con la profondità per la quale il deflusso della portata $(q_{\max})_{E_0}$ avviene con il minimo carico specifico.

In questo caso la presenza dell'ostruzione si manifesta attraverso un *rigurgito a monte* accompagnato da un abbassamento del pelo libero nel tronco ristretto *ove la corrente indisturbata risulti lenta*, oppure da un *rigurgito a valle* accompagnato da un innalzamento del pelo libero nel tronco ristretto *ove la corrente indisturbata risulti veloce*. Le due configurazioni sono delineate nella figura 3.43.

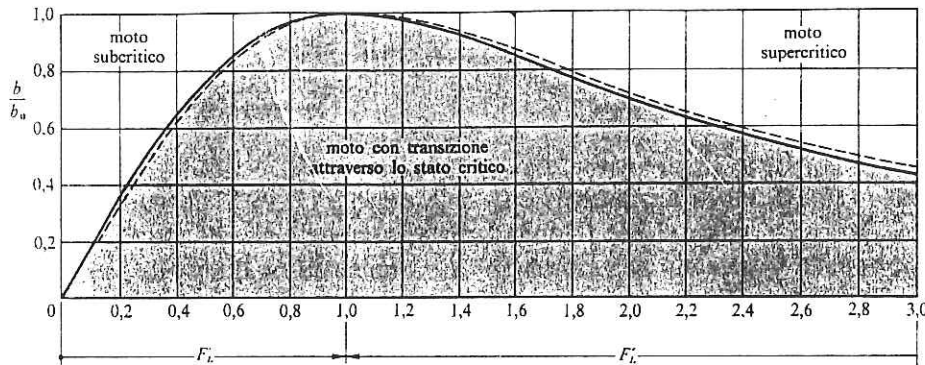


Figura 3.44: Grafico per individuare l'eventuale attraversamento della profondità critica in corrispondenza di un restringimento del canale.

È utile rappresentare graficamente la condizione limite (3.3.38) in termini del numero di Froude F_0 del moto indisturbato. Si ottiene

$$1 + \frac{F_0^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{F_0^{3/2}}{(b/b_0)^{3/2}} \geq 0 \quad (3.3.39)$$

Nelle condizioni limite in cui sussiste il segno di uguaglianza la (3.3.29) istituisce una relazione fra il numero di Froude F_0 e il rapporto di strozzamento (b/b_0) . Tale relazione è rappresentata graficamente in figura 3.44.

Dette F_L' ed F_L'' le soluzioni della (3.3.39) per assegnato valore del rapporto di strozzamento (compreso fra 0 ed 1), con $F_L' < F_L''$, possono presentarsi tre casi.

i) Il caso di deflusso subcritico: $F_0 < F_L'$

Come già rilevato, in questo caso la corrente si mantiene lenta. Il rigurgito ΔY , cioè la sopraelevazione della superficie libera subito a monte del restringimento, è stato sperimentalmente rilevato da Yarnell (1934)⁸ per diverse forme delle pile che danno luogo allo strozzamento. La formula empirica proposta da Yarnell è la seguente:

$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = C_{Y_a} (C_{Y_a} - 0.6 + 5F_0^2) \left\{ 1 - \frac{b}{b_0} + 15 \left(1 - \frac{b}{b_0} \right)^4 \right\} F_0^2 \quad (3.3.40)$$

con C_{Y_a} coefficiente di forma delle pile che assume i valori della tabella 3.2.

⁸Yarnell, D.L. (1034). U.S. Dept. of Agriculture, Tech. Bull. 442.

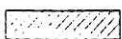




Formale delle pile					
Coefficiente C_{Y_a}	1.25	1.05	1.05	0.95	0.95

Tabella 3.2: Coefficiente di forma da utilizzare nella relazione di Yarnell (1934).

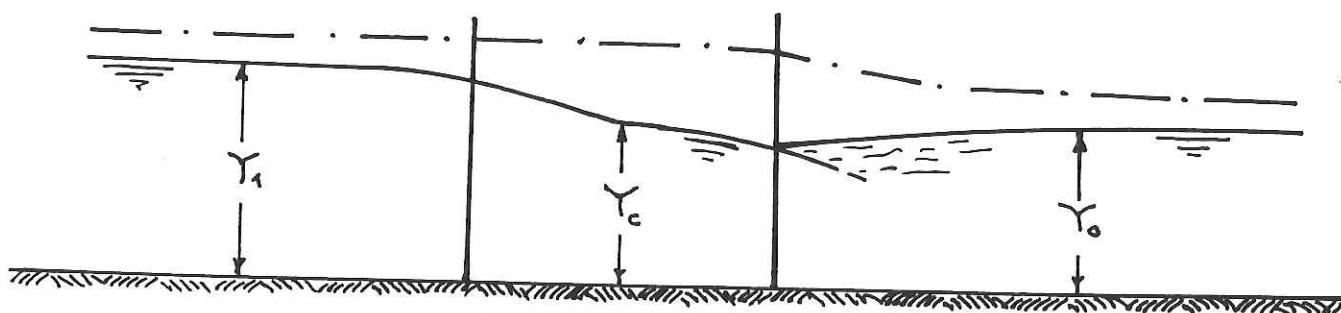


Figura 3.45: Schema di deflusso attraverso un'ostruzione con attraversamento dello stato critico.

ii) Il caso di deflusso con transizione attraverso lo stato critico : $F'_L < F_o < F''_L$

È questo il caso in cui la corrente attraversa lo stato critico in una sezione, compresa nel tratto ristretto, che costituisce una sezione di controllo perché rende le caratteristiche della corrente a monte indipendenti dalle condizioni di valle. Ciò, si badi, si verifica se la corrente indisturbata è veloce o, se lenta, tale che il suo raccordo con la corrente veloce a valle della sezione critica avvenga attraverso un risalto che non sommerge la sezione di controllo (figura 3.45).

In questo caso, nelle condizioni ideali di assenza di perdite nel tronco accelerato compreso fra la sezione 1 e la sezione di controllo c , applicando il teorema di Bernoulli si trova

$$Y_1 + \frac{Q^2}{2gb_o^2Y_1^2} = \frac{3}{2}Y_c = \frac{3}{2} \left(\frac{Q^2}{b^2g} \right)^{1/2} \quad (3.3.41)$$

che, scritta in termini del numero di Froude F_1 della corrente nella sezione 1, fornisce

$$1 + \frac{F_1^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{F_1^{2/3}}{(b/b_o)^{2/3}} = 0 \quad (3.3.42)$$

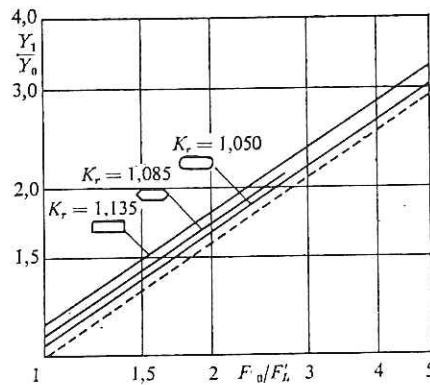


Figura 3.46: Correlazione tra Y_1/Y_0 e F_0/F'_L in base ai risultati sperimentali di Yarnell (Marchi, 1968).

Dunque, in assenza di perdite, si ottiene un'equazione identica alla (3.3.39) per F_1 . Tale equazione ha le due soluzioni F'_L ed F''_L ; la prima, minore di 1, è quella qui rilevante.

Nota il numero di Froude della corrente indisturbata F_0 segue, nel caso ideale,

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{F'_L}{F_0} = \left(\frac{Y_0}{Y_1} \right)^{3/2} \quad (3.3.43)$$

donde

$$Y_1 = \left(\frac{Q^2}{gb_0^2 F_L'^2} \right)^{1/3} \quad (3.3.44)$$

Marchi (1968)⁹ ha evidenziato come i risultati degli esperimenti di Yarnell (1934) sul rigurgito provocato dalle pile dei ponti, nel caso in esame, possono essere facilmente interpretati attraverso una formula simile alla (3.3.44) includendo un coefficiente K_r (maggiore di 1) per tener conto delle dissipazioni. Tale coefficiente dipende dalla forma delle pile ed assume i valori della figura 3.46. Si ha dunque:

$$Y_1 = K_r \left(\frac{Q^2}{gb_0^2 F_L'^2} \right)^{1/3} \quad (3.3.45)$$

Nota la portata, il coefficiente di strozzamento e il numero di Froude del moto indisturbato, oltre alla forma delle pile la (3.3.45) fornisce la profondità di

⁹Marchi, E. (1968). L'Energia Elettrica, XLV, 4.

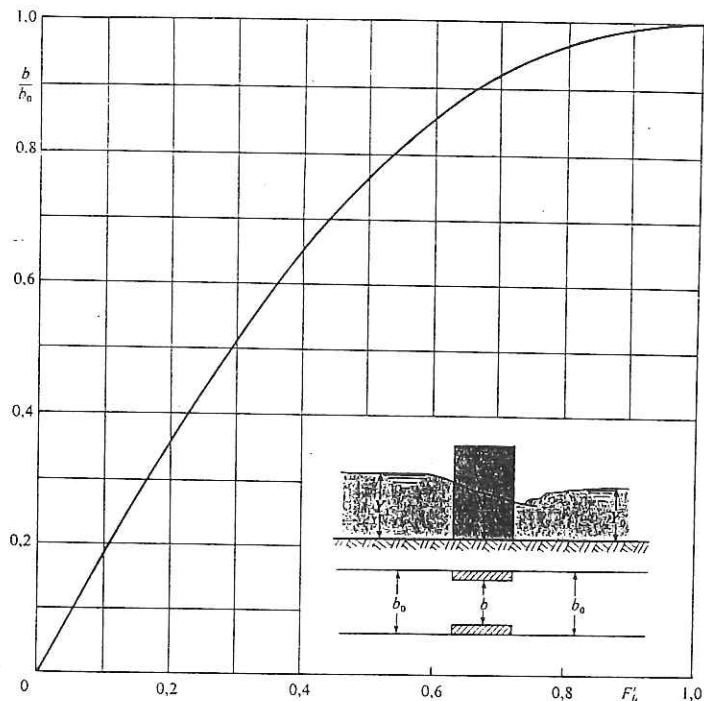


Figura 3.47: Grafico per la valutazione di F'_L in funzione del rapporto di restringimento b/b_0 , nel caso di fondo piano.

monte e quindi il rigurgito. Per agevolare tale calcolo riportato in figura 3.47 il grafico ingrandito per la valutazione di F'_L in funzione di b/b_0 .

Si badi al significato energetico del comportamento della corrente tanto nel caso i) come nel caso ii): la corrente si innalza a monte dell'ostruzione in modo da risparmiare energia in misura sufficiente da poterla dissipare nell'attraversamento del tronco ostruito.

iii) *Il caso di deflusso supercritico* : $F_o > F''_L$

L'ostruzione produce in questo caso un innalzamento del pelo libero che è limitato al tronco ristretto (vedi figura 3.43).

Considerazioni analoghe a quelle proposte per lo studio del deflusso attraverso le pile dei ponti, possono essere sviluppate per lo studio del deflusso attraverso il cosiddetto *misuratore a risalto*, o *canale Venturi*. Si tratta di un dispositivo che produce un graduale restringimento ed un successivo più gra-

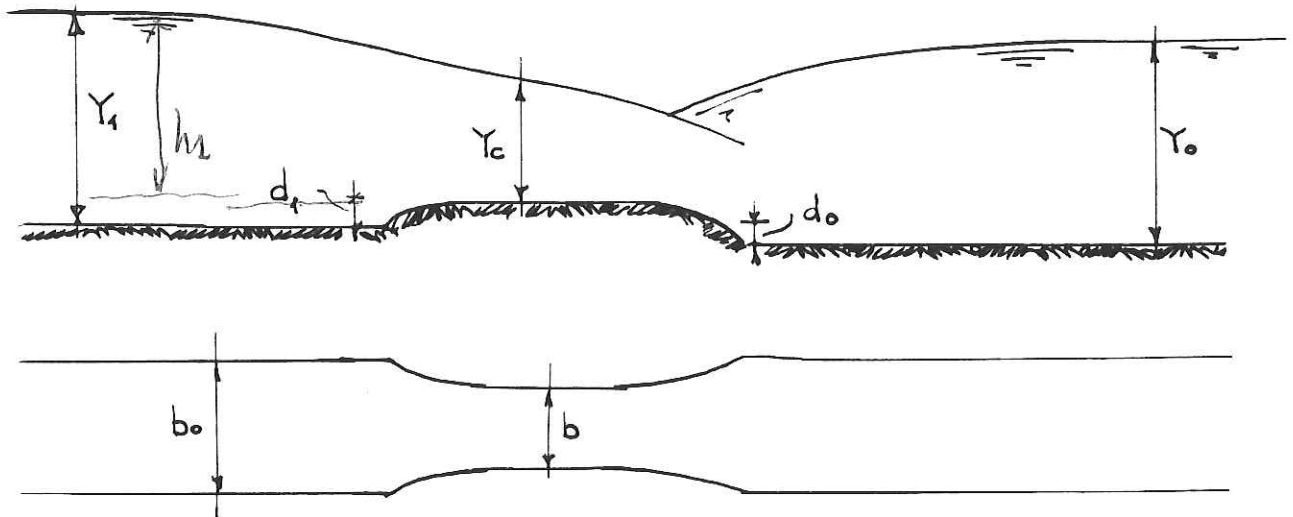


Figura 3.48: Schema di misuratore a risalto.

duale allargamento della sezione di un canale. L'effetto del restringimento, eventualmente associato a quello dovuto all'innalzamento del fondo attraverso l'inserimento di una soglia, dà luogo ad una transizione attraverso lo stato critico nel tronco ristretto e ad un raccordo con la corrente lenta di valle attraverso un risalto che si localizza nel tratto divergente del misuratore (figura 3.48).

L'analisi del moto attraverso il misuratore a risalto può essere eseguita seguendo un procedimento analogo a quello proposto per il caso di deflusso attraverso pile di ponti. Imponendo un bilancio energetico fra una sezione subito a monte del misuratore e la sezione critica, con le notazioni in figura 3.48, segue:

$$Y_1 - d_1 + \frac{Q^2}{2gb_0^2Y_1^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} + \Delta H \quad (3.3.46)$$

o, introducendo il numero di Froude F_1 della corrente di monte:

$$1 + \frac{F_1^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{F_1^{2/3}}{(b/b_0)^{2/3}} = \frac{d_1}{Y_1} + \frac{\Delta H}{Y_1} \quad (3.3.47)$$

Nel caso ideale ($\Delta H = 0$) e soglia assente ($d_1 = 0$) la (3.3.47) si riduce alla relazione (3.3.30). La figura (3.49) fornisce la radice della (3.3.47) indicata ancora con F'_L in funzione di d_1/Y_1 e b/b_0 nel caso di assenza di dissipazioni.

$$F_1 = \frac{u_1}{\sqrt{gY_1}} = \frac{Q}{bY_1\sqrt{gY_1}}$$

solo restringimento

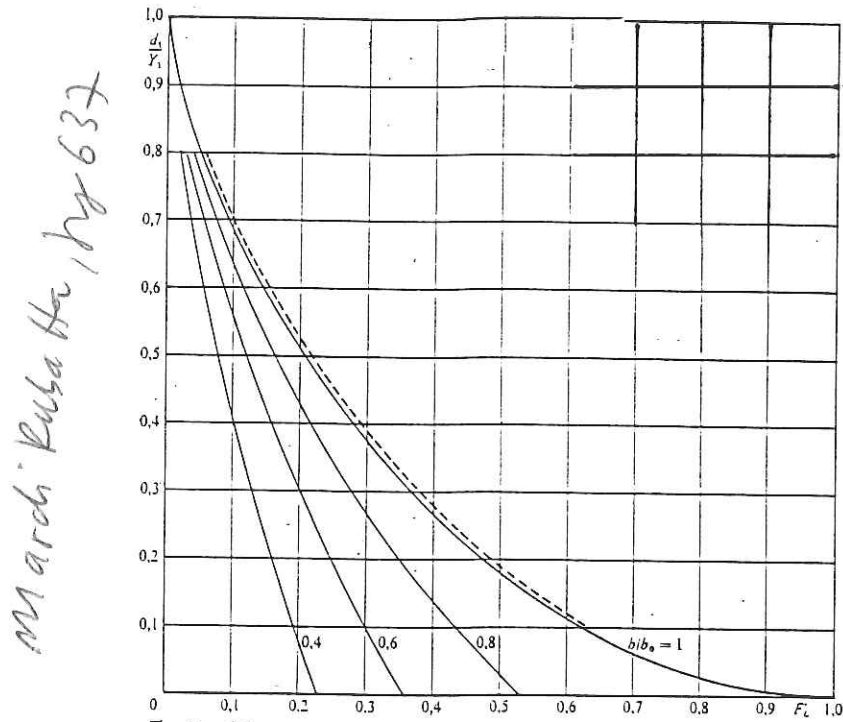


Figura 3.49: Valori del numero di Froude limite F'_L in funzione di d_1/Y_1 per valori del rapporto di restringimento da 0,4 a 1.

In assenza di dissipazioni segue

$$Q = \frac{F'_L}{\sqrt{2}} b_0 Y_1 \sqrt{2gY_1} \quad (3.3.48)$$

L'effetto delle dissipazioni può essere messo in conto, come si è già fatto nel caso delle pile dei ponti, introducendo un coefficiente correttivo μ a fattore nella (3.3.48). Il valore di μ dipende dal rapporto di restringimento e dalle caratteristiche della soglia. Le esperienze di Contessini (1936) e De Marchi (1937) forniscono i valori riportati nella tabella 3.3.

$b/b_o = 1$	$d_1 = d_o \neq 0$	$\mu = 0.982$
$b/b_o = 2/3$	$d_1 = d_o = 0$	$\mu = 0.966$
	$d_1 = 0, d_o \neq 0$	$\mu = 0.976$
$b/b_o = 1/3$	$d_1 = 0, d_o \neq 0$	$\mu = 0.990$
	$d_1 = d_o = 0$	$\mu = 0.966$
	$d_1 = 0, d_o \neq 0$	$\mu = 0.968$
	$d_1 = d_o \neq 0$	$\mu = 0.971$

$$\mu = \frac{1}{k_f^{3/2}}$$

Tabella 3.3: Il coefficiente correttivo μ per la formula (3.3.48) dei misuratori a risalto.

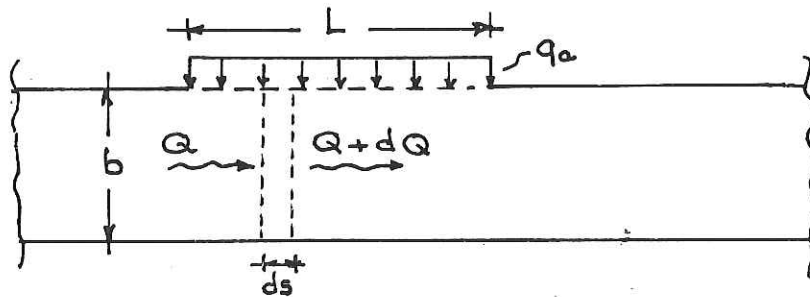


Figura 3.50: Schema di corrente con afflussi laterali.

3.4 Correnti con variazioni di portata

a Afflussi laterali

Esaminiamo nell'ambito del modello 1-D gli effetti di un afflusso laterale di portata. Configurazioni del tipo qui esaminato si incontrano ogni qualvolta sia necessario derivare una portata da un serbatoio a mezzo di sfioratore laterale.

In questo fenomeno si presentano significative dissipazioni associate al processo di miscelamento della portata affluente nel canale con quella defluente. Ciò suggerisce l'opportunità di analizzare il problema utilizzando il principio della quantità di moto. Ci riferiremo per semplicità al caso di alveo cilindrico e sezione arbitraria (figura 3.50).

Detta x la coordinata longitudinale con origine in corrispondenza della sezione iniziale del tronco soggetto all'afflusso laterale e detta q_a la portata affluente specifica, l'equazione di continuità e il principio della quantità di moto si scrivono

$$dQ = q_a dx \quad (3.4.1a)$$

$$\left[\gamma z_G \Omega + \rho \frac{Q^2}{\Omega} \right]_x = \left[\gamma z_G \Omega + \rho \frac{Q^2}{\Omega} \right]_{x+dx} \quad (3.4.1b)$$

con $\gamma (= \rho g)$ peso specifico, z_G profondità del baricentro della sezione Ω rispetto al pelo libero e $0 \leq x \leq L$ essendo L la lunghezza del tronco in cui si hanno afflussi laterali. La (3.4.1b) implica la conservazione della spinta totale ed è fondata sull'ipotesi di trascurabilità della differenza fra la componente della forza di gravità nella direzione del moto e la forza tangenziale agente sul contorno, ciò per il tronco di corrente di lunghezza dx esaminato. Si noti che sostanzialmente tale schema ipotizza che l'afflusso avvenga ortogonalmente all'asse del canale, non contribuendo in tal modo ad incrementare la quantità di moto longitudinale della corrente.

Nota la portata iniziale Q_o (o finale Q_L), integrando la (3.4.1a) con $q_a(x)$ assegnata si ottiene $Q(x)$ nel tronco (O-L); la (3.4.1b) consente quindi la valutazione della funzione $Y(x)$.

Il caso dell'alveo a sezione rettangolare

In particolare, nel caso di alveo a sezione rettangolare si ha

$$S = \frac{1}{2} \gamma b Y^2 + \rho \frac{Q^2}{bY} = \text{cost} \quad (3.4.2)$$

che implica, in forma adimensionale, la relazione

$$\frac{2S_o}{\gamma b Y_o^2} = \left(\frac{Y}{Y_o} \right)^2 + 2F_o^2 \left(\frac{Q}{Q_o} \right)^2 \left(\frac{Y_o}{Y} \right) \quad (3.4.3)$$

con Y_o e F_o rispettivamente profondità e numero di Froude nella sezione iniziale. Ma

$$S_o = \frac{1}{2} \gamma b Y_o^2 (1 + 2F_o^2) \quad (3.4.4)$$

donde la relazione adimensionale può porsi nella forma

$$\left(\frac{Y}{Y_o} \right)^2 + 2F_o^2 \left[\frac{Q}{Q_o} \right]^2 \left(\frac{Y_o}{Y} \right) = 1 + 2F_o^2 \quad (3.4.5a)$$

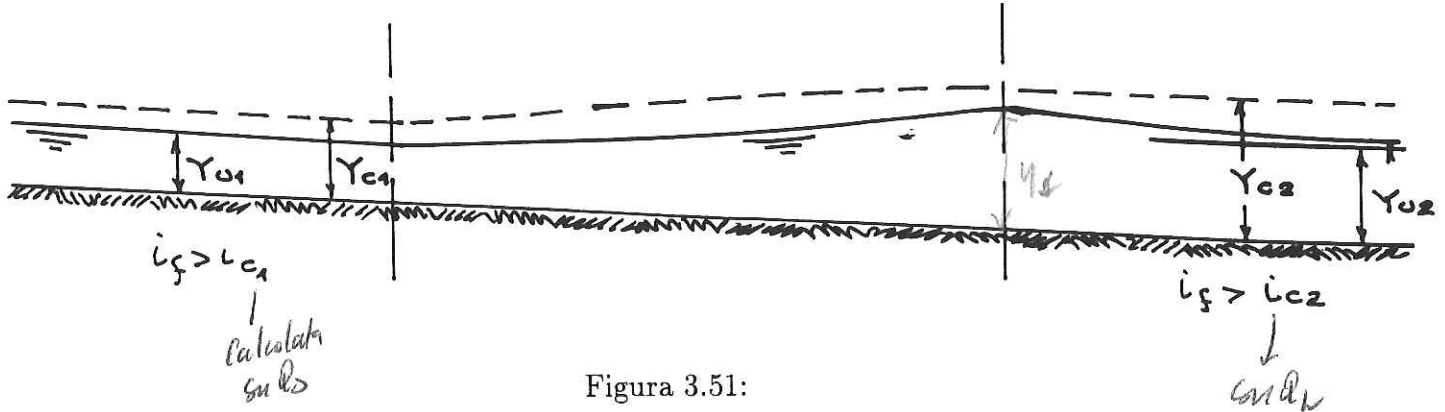
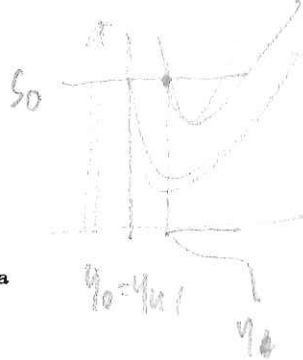


Figura 3.51:

o, alternativamente:

$$\left(\frac{Y}{Y_0}\right)^2 + \frac{(Q/Q_0)^2}{(Y/Y_0)} \left[\frac{2S_0}{\gamma b Y_0^2} - 1 \right] = \frac{2S_0}{\gamma b Y_0^2} \quad (3.4.5b)$$

La (3.4.5b) istituisce una relazione fra Y/Y_0 e Q/Q_0 per assegnato valore del parametro adimensionale $(2S_0/\gamma b Y_0^2)$.

L'integrazione della (3.4.1a) istituisce una relazione fra (Q/Q_0) ed (x/L) del tipo

$$\frac{x}{L} = f\left(\frac{Q}{Q_0}\right) \quad (3.4.6)$$

In particolare, nel caso di q_a costante si ha: $Q = Q_0 + q_a x \Rightarrow \frac{Q - Q_0}{q_a} = x$

$$\frac{x}{L} = \left(\frac{Q_0}{q_a L}\right) \left(\frac{Q}{Q_0} - 1\right) \quad (3.4.7)$$

Relazioni analoghe alle (3.4.5) e (3.4.6) si ottengono in termini dei valori finali (Q_L, Y_L, F_L) quando è nota la portata di valle Q_L . In particolare, nel caso di q_a costante, la (3.4.6) fornisce

$$\frac{x}{L} = 1 - \frac{Q_L}{q_a L} \left(1 - \frac{Q}{Q_L}\right) \quad (3.4.8)$$

Possono allora verificarsi i seguenti casi:

i) L'alveo si mantiene torrentizio e la corrente si mantiene veloce (figura 3.51).

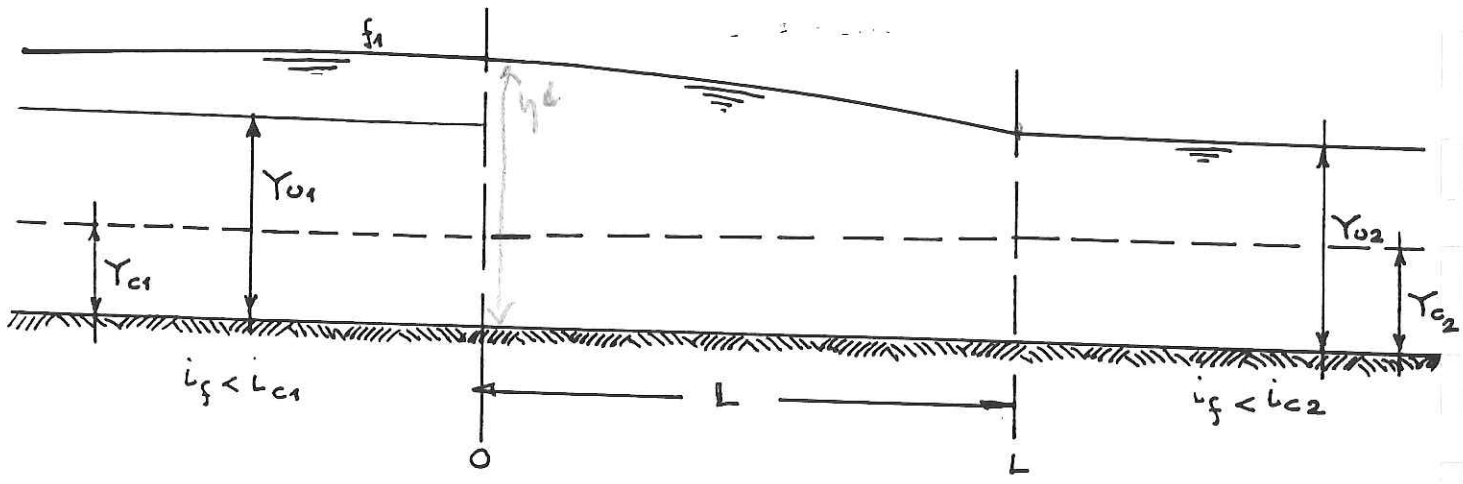
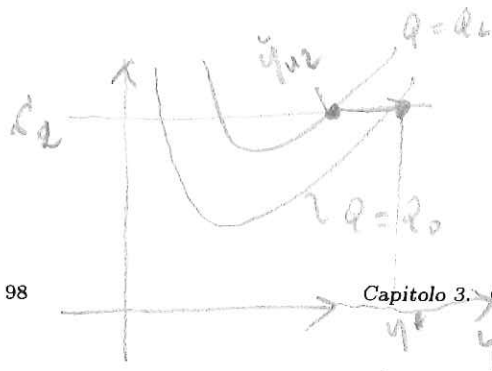


Figura 3.52:

Affinché l'alveo si mantenga torrentizio è sufficiente che risulti tale nella sezione iniziale.

Si noti infatti che i_f è assegnato mentre i_c varia al variare di Q . Poiché Q va crescendo con x , segue che anche Y_c cresce ed essendo la conduttanza una funzione crescente di Y la (3.1.14b) suggerisce che i_c va diminuendo con x : l'alveo assume dunque un carattere vieppiù torrentizio. Affinché la corrente si mantenga veloce la lunghezza L deve essere sufficientemente modesta. Si noti infatti che la (3.4.2) implica l'esistenza di un valore massimo di portata compatibile con il valore assegnato della spinta totale. Ricavando Q in funzione di Y nella (3.4.2) e derivando si ottiene infatti:

$i_c < i_f$
 $i_f > i_c > i_c$

$i_c = \frac{B}{ab^2} |_c$

$Q = \left[\frac{bY}{\rho} S - \frac{1}{2} g b^2 Y^3 \right]^{1/2}$
e inoltre

$\frac{dQ}{dY} \Big|_{S=const} = 0$ per $Y = Y_c = \sqrt{\frac{2 S_0}{3 \gamma b}}$ ✓ (3.4.9)

$Q_{max} = Q|_{Y=Y_c} = b\sqrt{g} \left(\frac{2 S_0}{3 \gamma b} \right)^{3/4}$ (3.4.10)

Se, dunque, il valore di Q_{max} previsto dalla (3.4.10) risulta inferiore al valore di Q_L la corrente non può mantenersi veloce. La configurazione che si realizza in tal caso è discussa al punto iii).

✓ ii) L'alveo si mantiene fluviale (figura 3.52)

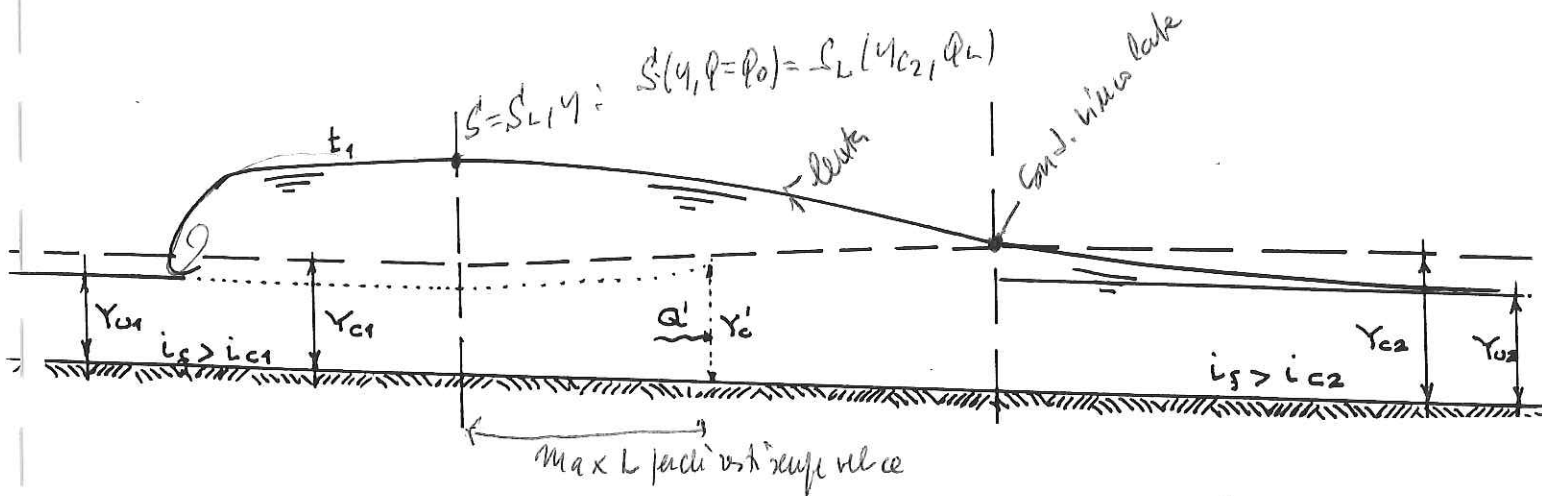


Figura 3.53: Profilo con afflusso laterale nel caso torrentizio a corrente veloce.

Affinché l'alveo si mantenga fluviale è sufficiente che sia tale per la portata $Q_L = (Q_o + q_a L)$. Vale qui il ragionamento opposto a quello proposto al punto i): procedendo verso monte i_c va crescendo dunque l'alveo diventa vieppiù fluviale.

iii) L'alveo si mantiene torrentizio ma la corrente non si mantiene veloce (figura 3.53).

Si tratta del caso i) con L sufficientemente grande. Il profilo lento che si instaura nel tronco in cui si ha afflusso di portata è caratterizzato da spinta totale $S_L(Y_{c2}, Q_L) > S_o(Y_{u1}, Q_o)$. Infatti il profilo punteggiato è caratterizzato da spinta totale $S_o(Y_{u1}, Q_o)$ che coincide con il valore $S(Y'_c, Q')$, con $Y'_c < Y_{c2}$ e $Q_o < Q' < Q_L$ e, in condizioni critiche, si ha $S_c = 3\gamma b Y_c^2 / 2$.

Il profilo lento si raccorda quindi con il tronco veloce di monte attraverso un profilo del tipo t_1 ed un risalto. In altre parole la corrente si presenterebbe in corrispondenza della sezione iniziale del tronco con afflussi laterali, con una spinta totale insufficiente al deflusso della portata Q_L . Essa dunque ricerca la configurazione che le consente di presentarsi con il valore minimo della spinta totale sufficiente al deflusso, ovvero cond. min. critica.

$$S_c = \min(S(Y, Q_L))$$

iv) L'alveo da fluviale diventa torrentizio (figura 3.54).

Questo caso, ancorché assai peculiare, può verificarsi in un alveo a sezione rettangolare molto larga poiché la profondità di moto uniforme cresce al crescere della portata più lentamente (esponente $\approx .6$) rispetto alla profondità critica (esponente $= .66$).

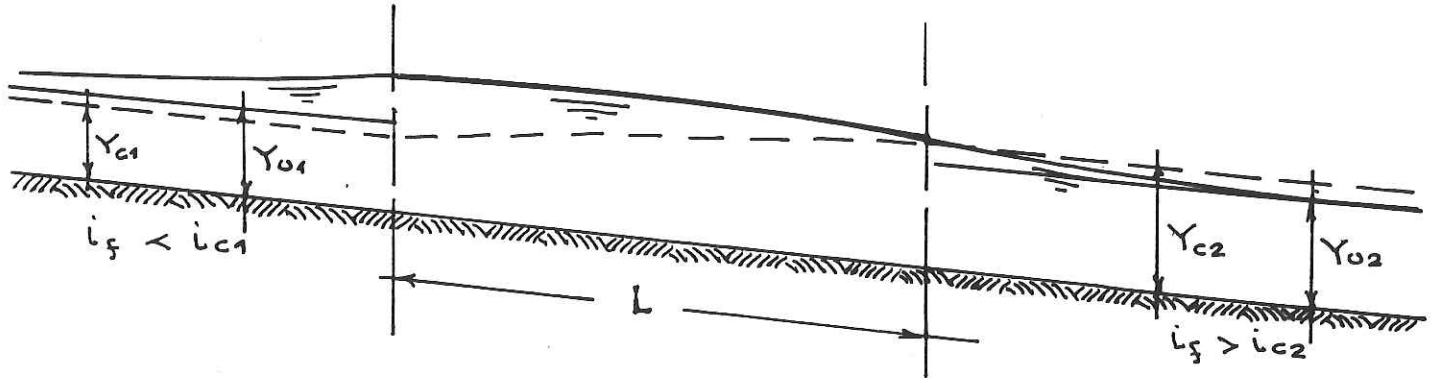


Figura 3.54: Profilo con afflusso laterale nel caso fluviale.

In tal caso s'instaura una configurazione del tipo iii) che però non necessita di un risalto a monte dove si realizza un profilo del tipo f_1 .

b Deflussi laterali

Il caso di corrente con deflusso laterale di portata esemplifica il comportamento di uno stramazzo laterale, cioè di uno stramazzo con soglia disposta lungo la sponda del canale. Trattandosi di un moto con perdite modeste è lecito assumere (De Marchi, 1934)¹⁰ la costanza del carico specifico lungo il tronco in esame. Detto c_Q il coefficiente di portata dello sfioratore, d la quota della soglia dello stramazzo sul fondo, segue

$$dQ = -q_u ds \quad (3.4.11)$$

$$q_u(s) = c_Q \sqrt{2g} (h - d)^{3/2} \quad (3.4.12)$$

$$Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} = E = \text{cost} \quad (3.4.13)$$

con $c_Q \simeq (.38 \div .40)$ ed s coordinata longitudinale con origine nella sezione iniziale dello sfioratore. Il sistema precedente può essere risolto numericamente a partire da una condizione nota (di valle se la corrente è ivi lenta, di monte se la corrente è ivi veloce).

Anche in questo caso possono verificarsi diverse configurazioni.

¹⁰De Marchi, G. (1934). L'Energia Elettrica, XI. 11.

$$Y + \frac{Q^2}{g b^2 Y^2} = E \rightarrow 2(E-1) = \frac{Q^2}{g b^2 Y^2} = \frac{Y_c^3}{Y^2} \rightarrow 2\left(\frac{E}{Y} - 1\right) = \frac{Y_c^3}{Y^3}$$

$$\frac{Y}{(Y_c)_q} = 2\left(\frac{E}{Y} - 1\right)^{-1/3}$$

i) L'alveo si mantiene torrentizio (figura 3.55a)

Affinché ciò accada è sufficiente che l'alveo risulti tale con le condizioni di valle. In tal caso è facile riconoscere che un profilo inizialmente veloce si mantiene tale. Infatti per un canale a sezione rettangolare la (3.4.13) può porsi nella forma:

MONTI

$$\frac{Y}{(Y_c)_q} = \left[2 \left(\frac{E}{Y} - 1 \right) \right]^{-1/3} \quad (3.4.14)$$

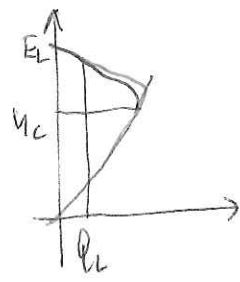
Per un profilo veloce a E costante, al decrescere di q , Y diminuisce e il rapporto (E/Y) aumenta risultando così sempre superiore a $3/2$, sicché come si evince per la (3.4.14) Y risulta sempre minore di $(Y_c)_q$.

ii) L'alveo si mantiene fluviale e la corrente è ovunque lenta (figura 3.55b)

Affinché l'alveo si mantenga fluviale deve risultare per ~~con~~ le condizioni di monte. valle

$$Y_c = \frac{2}{3} E_L$$

In tal caso un profilo lento nella sezione terminale si mantiene tale procedendo verso monte, se la massima portata per unità di larghezza compatibile con il carico specifico E_L risulta superiore alla portata iniziale. Dunque deve risultare



$$q_0 < q_{\max|E_L} = \sqrt{g} \left(\frac{2}{3} E_L \right)^{3/2} \quad (3.4.15)$$

iii) L'alveo si mantiene fluviale ma la corrente non si mantiene ovunque lenta (figura 3.55c)

Se la (3.4.11) non risulta soddisfatta. Il calcolo fondato sulle (3.4.11-3.4.13) si esegue in modo diretto, se la corrente è ovunque veloce, a partire dalla sezione iniziale dello sfioratore. Se la corrente è lenta in parte o nella totalità dello sfioratore il calcolo va eseguito per tentativi, perché non è a priori nota la portata di valle.

ma $E = q^2 / (g Y^3)$ NO

3.5 Modellazione numerica unidimensionale di moti stazionari

a Introduzione

Esaminiamo alcuni procedimenti numerici utilizzati per la soluzione dell'equazione dei profili di rigurgito nel caso più generale di alveo non cilindrico e sezione irregolare. In tal caso le equazioni di continuità e del moto,

$$y_{u1} > y_{u2} > y_0$$

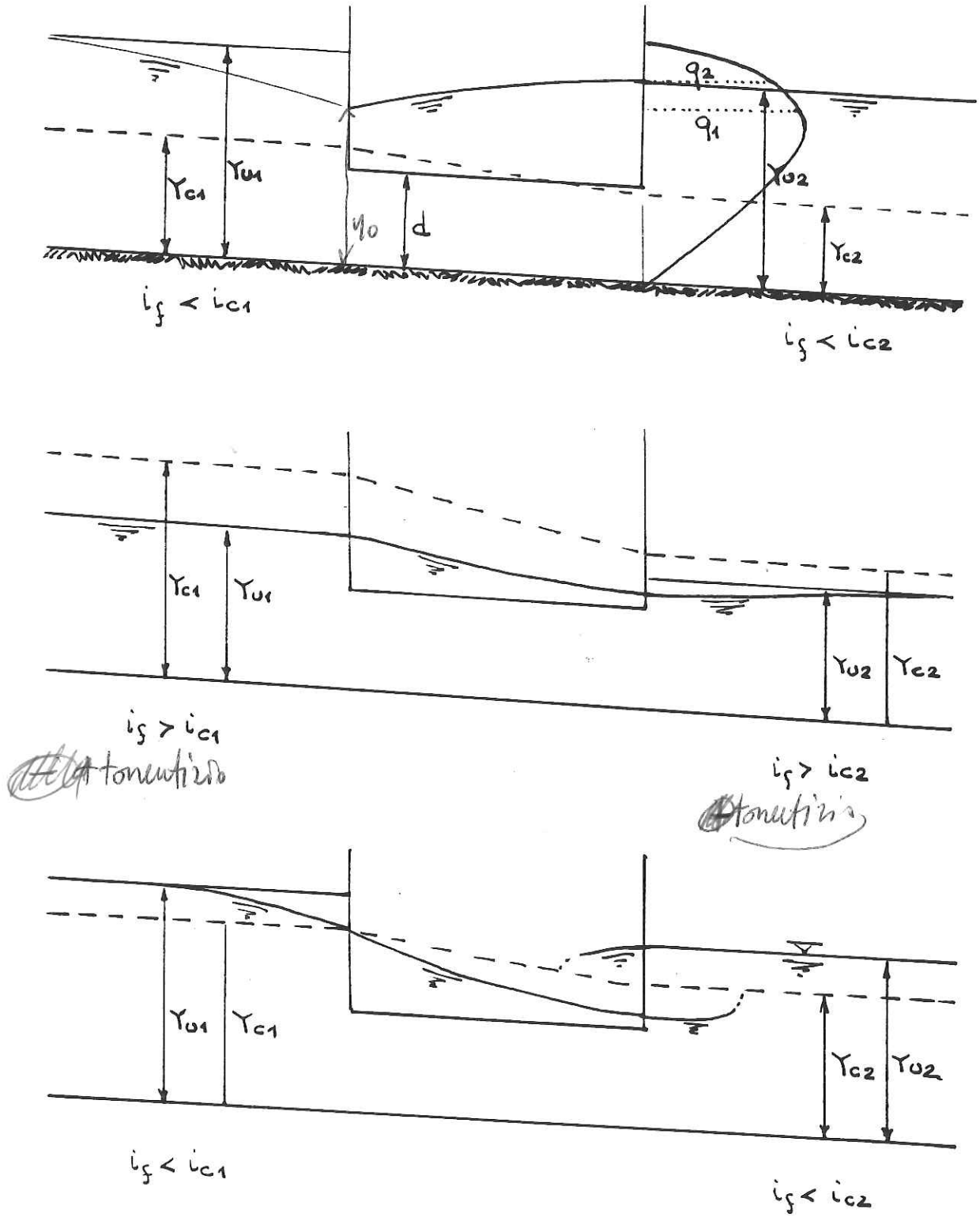


Figura 3.55: Profili con deflussi laterali. a) L'alveo si mantiene torrentizio. b) L'alveo si mantiene fluviale e la corrente è ovunque lenta. c) L'alveo si mantiene fluviale ma la corrente cambia carattere.

nell'ambito del modello unidimensionale e per *moti stazionari*, si scrivono

$$Q = U\Omega = \text{cost.} \quad (3.5.1)$$

$$\frac{d}{dx}(\beta U^2 \Omega) + g\Omega \frac{dh}{dx} + \frac{B}{\rho} \tau_o^f = 0 \quad (3.5.2)$$

L'adozione dello schema di corrente richiede che siano soddisfatte le ipotesi discusse nel capitolo 1, in particolare la quasi-cilindricità del moto. Dunque le variazioni della forma della sezione devono risultare sufficientemente lente da non violare il vincolo della quasi-unidirezionalità del moto.

Essendo l'alveo irregolare si ha in generale $\Omega = \Omega[h(x), x]$. Segue quindi:

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{\partial\Omega}{\partial h} \frac{dh}{dx} + \frac{\partial\Omega}{\partial x} \Big|_h = b \frac{dh}{dx} + \frac{\partial\Omega}{\partial x} \Big|_h \quad (3.5.3)$$

Si noti che nel caso di alveo cilindrico il secondo termine a secondo membro della (3.5.3) diventa

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} \Big|_h = b i_f \quad (3.5.4)$$

Utilizzando le relazioni (3.5.1) e (3.5.3) si ha, dalla (3.5.2),

$$\frac{dh}{dx} = \left[\frac{Q^2}{g} \left(\frac{\beta}{\Omega^3} \frac{\partial\Omega}{\partial x} \Big|_h - \frac{1}{\Omega^2} \frac{d\beta}{dx} \right) - \frac{\tau_o^f}{\gamma R_i} \right] \left[1 - \beta \frac{Q^2 b}{g\Omega^3} \right]^{-1} \quad (3.5.5)$$

Il termine nella tensione tangenziale media al fondo è valutato assumendo che il moto si comporti come una successione continua di stati localmente uniformi. Si pone cioè

$$\frac{\tau_o^f}{\gamma R_i} = \frac{U^2}{g R_i C^2} = \frac{Q^2}{g \Omega^2 C^2 R_i} \quad (3.5.6)$$

con U, C, R_i valori locali di velocità media, conduttanza e raggio idraulico.

L'equazione per i profili di rigurgito si scrive quindi nella forma

$$\frac{dh}{dx} = \frac{Q^2}{g} \left[\frac{\beta}{\Omega^3} \frac{\partial\Omega}{\partial x} \Big|_h - \frac{1}{\Omega^2} \frac{d\beta}{dx} - \frac{1}{\Omega^2 C^2 R_i} \right] \left[1 - \beta \frac{Q^2 b}{g\Omega^3} \right]^{-1} \quad (3.5.7)$$

La valutazione del coefficiente correttivo della quantità di moto β e del termine che quantifica le resistenze può effettuarsi sulla base dello schema

introdotto da Engelund (1964)¹¹ e descritto nel capitolo 2. Si ha dunque:

$$R_i C^2 = \frac{1}{\Omega^2} \left[\int_{-b_1}^{b_2} c(y) Y^{3/2} dy \right]^2 \quad (3.5.8)$$

Inoltre

$$\beta = \frac{\int_{\Omega} U^2 d\Omega}{\Omega U^2} = \Omega \left[\int_{-b_1}^{b_2} c(y)^2 Y^2 dy \right] \left[\int_{-b_1}^{b_2} c(y) Y^{3/2} dy \right]^{-2} \quad (3.5.9)$$

Poiché il secondo membro della (3.5.7) può riguardarsi come una generica funzione f di x e h , il problema si riduce alla soluzione di un'equazione differenziale non lineare del primo ordine del tipo

$$\frac{dh}{dx} = f(x, h) \quad (3.5.10)$$

con assegnata condizione iniziale $h(x_0) = h_0$. Posto che la funzione $f(x, h)$ soddisfi alle condizioni per l'esistenza e unicità della soluzione, il problema è quello di determinare per via numerica approssimazioni h_k dei valori $h(x_k)$ che la soluzione esatta della (3.5.10) assume a partire dalla condizione iniziale nei punti x_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) che identificano le sezioni rilevate disponibili del corso d'acqua in esame.

Prima di affrontare tale problema è opportuno precisare alcune difficoltà che si presentano sia per la natura matematica del problema, sia per la sua natura fisica e per le caratteristiche con cui si presenta nella pratica. Anzitutto nei problemi ai valori iniziali non sono disponibili stime significative degli errori associati ai diversi procedimenti numerici ovvero, quando disponibili, esse forniscono limiti così ampi entro cui l'errore può cadere da ridurre l'utilità. Ne consegue che indicazioni sugli effettivi errori associati all'integrazione numerica possono ottenersi soltanto attraverso esperimenti numerici effettuati integrando la (3.5.10) con diversi passi di integrazione o confrontando la soluzione numerica con la soluzione (ancora numerica) ottenuta con procedimento diverso. Una seconda difficoltà consiste nel fatto che il passo spaziale $\Delta x_k = (x_{k+1} - x_k)$ varia in generale con k perché l'ubicazione delle sezioni costituisce un dato su cui non è agevole intervenire.

¹¹Engelund F. (1964). Tech. Univ. Denmark, Basic Res. Rep. 6.

b Richiami sull'esistenza e unicità della soluzione di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Prima di procedere alla descrizione dei metodi numerici utilizzati nella soluzione dell'equazione dei profili di rigurgito in alvei naturali è opportuno soffermarsi brevemente sulle caratteristiche matematiche del problema ai valori iniziali. La (3.5.10) è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, scritta in forma normale, che possiamo riscrivere per generiche variabili, dipendente y e indipendente x , nella forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.5.11 a, b)$$

Si noti che ogni equazione differenziale ordinaria di grado N superiore al primo, che può essere ridotta in forma normale rispetto alla derivata di grado massimo, cioè nella forma

$$\frac{d^N y}{dx^N} = F \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{N-1} y}{dx^{N-1}} \right) \quad (3.5.12)$$

può essere trasformata in un sistema di N equazioni differenziali ordinarie del primo ordine attraverso l'introduzione di nuove variabili così definite:

$$z_1 = y \quad z_n = \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \quad (n = 2, 3, \dots, N) \quad (3.5.13 a, b)$$

La (3.5.12) si traduce nel sistema di N equazioni del primo ordine

$$\frac{dz_n}{dx} = z_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \quad (3.5.14)$$

$$\frac{dz_N}{dx} = F(x, z_1, z_2, \dots, z_N) \quad (3.5.15)$$

Il *teorema fondamentale di esistenza e unicità* per le equazioni differenziali normali del I° ordine afferma che, posto che $f(x, y)$ sia continua e Lipschitziana (nei confronti della y) le *caratteristiche* della (3.5.11), cioè le sue curve integrali nel piano (x, y) , sono tali per cui per ogni punto (x_0, y_0) del dominio R , ne passa una e una sola. Ricordiamo che la condizione di Lipschitz per la funzione $f(x, y)$ si scrive

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A|y_1 - y_2| \quad (3.5.16)$$

con A costante positiva. La condizione (3.5.16) asserisce sostanzialmente il carattere limitato dei rapporti incrementali della funzione f rispetto alla variabile y in un certo intervallo.

Quando la (3.5.16) è soddisfatta, la funzione $f(x, y)$ è certamente continua rispetto a y perché il suo primo membro può essere reso arbitrariamente piccolo. La (3.5.16) è inoltre soddisfatta se in R la derivata parziale di f rispetto a y si mantiene limitata. Dunque la condizione di Lipschitz è più restrittiva della continuità ma meno restrittiva della condizione di derivabilità con derivata limitata.

c Soluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie del I ordine: schemi espliciti ed impliciti

Poniamo che la funzione $f(x, y)$ soddisfi alle condizioni citate. Il problema è dunque quello di determinare l'approssimazione numerica di quella particolare soluzione esatta della (3.5.11) che soddisfa alla condizione iniziale assegnata $y(x_0) = y_0$. Nella soluzione numerica di un'equazione differenziale si opera generalmente sostituendo a un processo continuo un processo discreto rappresentato da un'equazione alle differenze la cui soluzione corrisponde a valori discreti della variabile indipendente.

Indichiamo con y_k la soluzione numerica (approssimata) dell'equazione alle differenze in corrispondenza dei punti nodali $x_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ e con $y(x_k)$ la corrispondente soluzione esatta dell'equazione differenziale. Sia inoltre

$$f_k = f(x_k, y_k) \quad (3.5.17a)$$

il valore della funzione f , per $x = x_k$, valutato sulla base della soluzione numerica e

$$f(x_k, y(x_k)) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_k} \quad (3.5.17b)$$

il valore esatto di f . Poniamo inoltre, per semplicità, che sia costante l'intervallo fra due passi successivi di integrazione, cioè

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \delta \quad \delta > 0 \quad (3.5.18)$$

Nel generico passo spaziale Δx_n la soluzione della (3.5.11) può porsi nella forma integrale

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx \quad (3.5.19)$$

Posto che l'integrazione sia stata già condotta fino al passo x_n , sicché siano note approssimazioni numeriche $y_k (k \leq n)$ dei valori esatti $y(x_k)$, e quindi siano noti i valori $f_k (k \leq n)$, è concettualmente possibile sostituire la f nella (3.5.19) con un polinomio interpolante che assume i valori f_k nei punti $x_k (k \leq n)$ ed eseguire l'integrazione. Così operando si sostituisce all'operatore differenziale un operatore algebrico, cioè un'equazione alle differenze.

La formula generale di tale operatore algebrico è data dalla relazione:

$$y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \dots + a_p y_{n-p} + \dots + \delta [b_{-1} f_{n+1} + b_0 f_n + \dots + b_p f_{n-p} + \dots] \quad (3.5.20)$$

Sulla base della (3.5.20) si perviene a diversi schemi di integrazione che possono essere distinti in due categorie:

- *schemi espliciti* (formule di integrazione 'in avanti') nei quali y_{n+1} è espresso come combinazione lineare dei valori di y_k e f_k con $k \leq n$, cioè risulta $b_{-1} = 0$;
- *schemi impliciti* (formule di integrazione iterative) nei quali y_{n+1} è espresso come combinazione lineare di f_{n+1} e dei valori di y_k e f_k con $k \leq n$, cioè $b_{-1} \neq 0$; poiché in tale caso anche f_{n+1} compare nella determinazione di y_{n+1} è necessario operare con un processo iterativo per ottenere la soluzione.

Un'altra classificazione può essere introdotta sulla base del numero dei passi spaziali coinvolti nella determinazione di y_{n+1} . Si ha:

- schemi a *singolo passo* ('single step') nei quali solo il livello $n(y_n, f_n)$, e eventualmente f_{n+1} nel caso di schema implicito, è utilizzato per il calcolo di y_{n+1} ; in tal caso si pone quindi $a_k = b_k = 0 (k \neq 1)$;
- schemi a *passo multiplo* ('multi step') nei quali anche i valori di y_k e f_k con $k < n$ intervengono nella determinazione di y_{n+1} ; in tal caso vale la formula generale (3.5.20) dove alcuni coefficienti possono essere posti pari a zero a seconda dell'ordine dello schema che si vuole utilizzare. Per esempio in uno schema del secondo ordine si porrà $a_k = b_k = 0 (k \neq 2)$, cioè $y_{n+1} = F(y_n, y_{n-1}, f_{n+1}, f_n, f_{n-1})$.

In generale i metodi espliciti risultano più semplici perché consentono la determinazione diretta di y_{n+1} senza richiedere iterazione; tuttavia sono in generale preferibili gli schemi impliciti, sia per la maggior precisione, sia perché presentano, come vedremo, caratteristiche di stabilità numerica migliori rispetto agli schemi espliciti.

Per quanto riguarda la distinzione fra schemi single-step e multi-step va sottolineato che gli schemi multi-step conducono in generale a una soluzione più precisa essendo normalmente caratterizzati da un errore di troncamento inferiore. Tuttavia l'utilizzo di un modello multi-step equivale a sostituire l'equazione differenziale di partenza con un'equazione alle differenze di ordine più elevato. Ciò comporta l'introduzione di una soluzione spuria che può essere fonte di instabilità dello schema numerico. Si noti infine che i modelli single-step necessitano soltanto della condizione iniziale $y_0 = y(x_0)$ per potere essere utilizzati, mentre gli schemi multi-step richiedono l'introduzione preliminare di più valori iniziali.

d Congruenza, convergenza, stabilità e precisione degli schemi numerici

Quando si risolve un'equazione differenziale con un procedimento numerico alle differenze, gli errori associati alla soluzione numerica e il meccanismo che ne controlla la propagazione nel corso dell'integrazione svolgono un ruolo determinante in relazione alla precisione della soluzione ottenuta. Definiamo l'errore complessivo al generico passo Δx_n di integrazione attraverso la relazione

$$\epsilon_{n+1} = y_{n+1} - y(x_{n+1}) \quad (3.5.21)$$

cioè come differenza fra la soluzione numerica approssimata ottenuta attraverso una relazione del tipo (3.5.20) e la soluzione esatta.

Come già evidenziato nella Appendice A tre fattori principali contribuiscono all'errore ϵ_{n+1} :

- i) il II membro della (3.5.20) non è un'esatta rappresentazione di $y(x_{n+1})$ ma è una rappresentazione approssimata (troncata) della somma di infiniti termini che sarebbe necessaria per rappresentare esattamente y_{n+1} ad ogni passo di integrazione come richiesto dalla relazione (3.5.19); la sostituzione dell'operatore differenziale continuo (3.5.11) con l'operatore numerico discreto (3.5.20) produce quindi un errore su y_{n+1} chiamato errore di troncamento;

- ii) nella valutazione del II membro della (3.5.20) il valore calcolato viene arrotondato a un numero finito di cifre significative (decimali); ciò implica un *errore di arrotondamento* che inevitabilmente influenza i risultati di ogni schema che coinvolge operazioni numeriche;
- iii) le quantità a II membro della (3.5.20) non sono note senza errore, cioè nel calcolo di y_{n+1} si utilizzano dati che non sono esatti perché ricavati attraverso un procedimento numerico che non è esatto o perché non esatti in partenza (*errore sui dati iniziali*).

L'errore complessivo dello schema numerico è una combinazione di tali errori.

Le modalità secondo la quale l'errore si propaga durante l'integrazione numerica e influenza i valori di y via via calcolati individuano la cosiddetta *stabilità* del procedimento numerico. Si noti che tale meccanismo di propagazione dell'errore è strettamente legato alla natura dello schema adottato ed è indipendente, in generale, dal passo di integrazione δ . L'altro aspetto fondamentale relativo all'influenza dell'errore sul risultato finale è l'entità dell'errore di troncamento. Quest'ultimo può essere controllato riducendo l'ampiezza del passo di integrazione δ .

Prima di procedere all'esame di alcuni schemi numerici di soluzione dell'equazione (3.5.11) fra quelli più frequentemente utilizzati è opportuno richiamare brevemente i problemi che si pongono in generale in un procedimento di soluzione numerica di un'equazione differenziale quando si sostituisce all'operatore differenziale L_D , nel caso in esame la relazione (3.5.11), un operatore numerico L_N , cioè la relazione (3.5.20). A puro scopo sistematico si può affermare che lo schema adottato deve soddisfare a cinque requisiti. Il soddisfacimento di tali requisiti, e in particolare le condizioni che tali requisiti pongono, costituiscono il criterio sulla base del quale effettuare la scelta fra i diversi schemi numerici. Tali requisiti sono:

- i) *Congruenza* (o consistenza). L'operatore numerico alle differenze L_N è congruente con l'operatore differenziale L_D se è verificata la condizione

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |L_N - L_D| = 0 \quad (3.5.22)$$

La quantità $|L_N - L_D|$ è detta *errore di troncamento*. Si ha in generale

$$|L_N - L_D| \sim \delta^m + O(\delta^{m+1}) \quad (3.5.23)$$

m , cioè l'esponente minimo di δ dell'errore di troncamento, è detto *ordine di approssimazione* dello schema numerico.

Dunque uno schema numerico è detto di ordine m se l'errore di troncamento tende a zero al tendere a zero del passo di integrazione con rapidità δ^m . Dunque perché lo schema numerico sia congruente deve essere verificata la condizione $m \geq 1$.

Si noti che l'errore di troncamento è un errore dell'operatore numerico, non già della soluzione numerica, pur se tali due aspetti sono spesso strettamente collegati. In altre parole la sola condizione di congruenza non dice quanto rapidamente l'errore della soluzione tenda a zero, cioè l'ordine di approssimazione costituisce soltanto una stima di tale errore perché δ è sempre una quantità finita.

- ii) *Convergenza*. Lo schema numerico è convergente se è verificata la condizione

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |y_n - y(x_n)| = 0 \quad (3.5.24)$$

cioè se la soluzione numerica tende a quella esatta nel nodo n al tendere a zero del passo di integrazione. Si noti che nell'effettuare il limite $\delta \rightarrow 0$ si deve anche porre $n \rightarrow \infty$ poiché la quantità $(n\delta)$ deve avere limite finito e pari a $x = x_n = n\delta$.

- iii) *Stabilità*. Lo studio della stabilità di un procedimento numerico consente come detto di precisare le modalità di propagazione dell'errore nel corso dell'integrazione numerica. Uno schema numerico si dice *stabile* se l'errore, in particolare l'errore di arrotondamento dell'elaboratore numerico, pur propagandosi nel corso dell'integrazione numerica non si amplifica. Si noti che la stabilità dello schema numerico è questione tutt'affatto diversa dalla stabilità dell'equazione, e quindi del fenomeno fisico che tale equazione descrive.

Va ricordato in tale contesto il teorema di equivalenza introdotto da Richtmyer e Morton (1967)¹² il quale afferma che, assegnati un problema ai valori iniziali lineare e una sua approssimazione discreta tale da soddisfare la condizione di congruenza, la stabilità è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della soluzione approssimata (numerica).

¹²Richtmyer R.D., Morton K.W. (1967). *Difference method for initial value problems*, Wiley, New York.

- iv) *Precisione.* La precisione di uno schema numerico è definita da una stima dell'errore complessivo della soluzione numerica rispetto alla soluzione esatta. Tale stima, come già accennato, può essere effettuata in modo rigoroso solo in rari casi. In generale è necessario fare ricorso a esperimenti numerici.
- v) *Velocità ed efficienza computazionale.* Tale requisito è particolarmente importante se si devono risolvere sistemi con un elevato numero di equazioni che richiedono elevati tempi macchina. In tal caso diventa importante contenere il numero delle operazioni elementari eseguite a ogni passo di integrazione. Parallelamente è preferibile l'utilizzo di uno schema di facile implementazione sull'elaboratore elettronico, per il quale sia relativamente semplice stimare l'errore a ogni passo e procedere a eventuali variazioni del passo di integrazione nel corso del procedimento. La riduzione del passo di integrazione δ consente di limitare l'errore di troncamento fino a renderne trascurabile l'influenza sull'errore complessivo; ciò evidentemente conduce a un incremento del numero di passi spaziali necessari per effettuare l'integrazione, cioè del tempo di calcolo. Sarà quindi in generale necessario operare un compromesso fra l'esigenza di precisione e quella del contenimento del tempo macchina richiesto dall'integrazione.

e Esempi di schemi numerici

Procediamo ora all'esame di alcuni schemi numerici di frequente utilizzo nella soluzione dell'equazione dei profili di rigurgito. Essi possono riguardarsi quali casi particolari della relazione generale (3.5.20).

Metodo di Eulero

È il più semplice fra gli schemi numerici utilizzati per la soluzione del problema (3.5.11) e si ottiene dalla (3.5.20) ponendo $a_0 = b_0 = 1$, $b_{-1} = 0$, $a_k = b_k = 0$ ($k \geq 1$):

$$y_{n+1} = y_n + \delta f_n = y_n + \Delta x_n f_n \quad (3.5.25)$$

L'idea fondamentale del procedimento è dovuta a Leonhard Euler (1768-70)¹³: nella (3.5.25) la derivata di y nel nodo n è approssimata con il rapporto incrementale espresso in termini dell'operatore alle differenze in avanti. Lo

¹³Euler L. (1768-70). Institutiones calculi integralis, Petersburg.

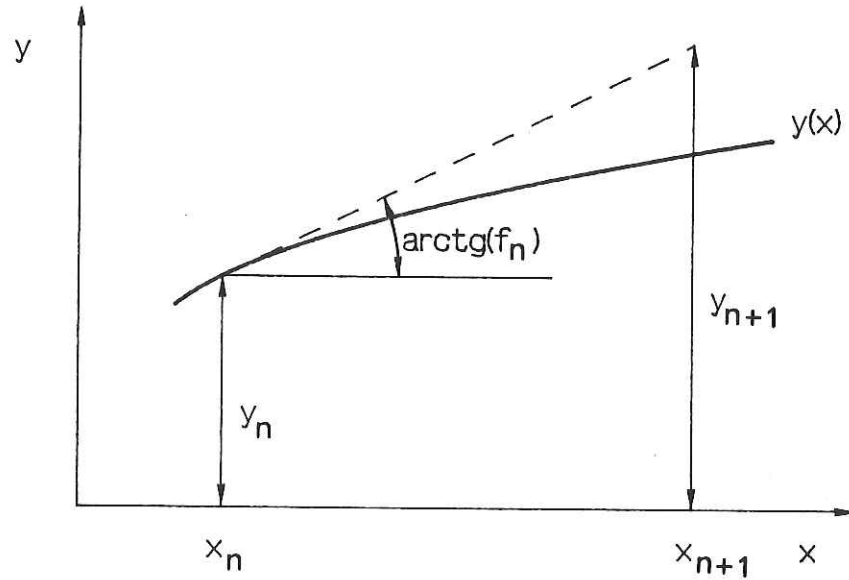


Figura 3.56: Il metodo del poligono (Eulero).

schema è noto anche con il nome di metodo del poligono ed equivale ad assumere la funzione $f(x, y)$ costante nel passo generico di integrazione da n a $n + 1$ e pari al suo valore f_n nel nodo iniziale (figura 3.56). Si tratta evidentemente di un metodo esplicito perché l'incognita y_{n+1} è presente solo a primo membro, f_n essendo nota in funzione del valore y_n già noto.

Si pongono per tale procedimento i problemi descritti al punto precedente. Verifichiamo innanzitutto la *congruenza* dello schema; si ha:

$$L_N = \frac{y_{n+1} - y_n}{\delta} - f_n \quad L_D = \frac{dy}{dx} - f(x, y) \quad (3.5.26a, b)$$

Sviluppando y_{n+1} in serie di Taylor con punto iniziale y_n si ha

$$y_{n+1} = y_n + \delta \left(\frac{dy}{dx} \right)_n + \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_n + O(\delta^3) \quad (3.5.27)$$

Sostituendo in L_N segue

$$L_N = \left(\frac{dy}{dx} \right)_n - f_n + \frac{\delta}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_n + O(\delta^2) = \left(\frac{dy}{dx} - f + \frac{\delta}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \right)_n + O(\delta^2) \quad (3.5.28)$$

Lo schema è dunque congruente perché $L_N \rightarrow L_D$ quando $\delta \rightarrow 0$. L'errore di troncamento è dato dalla relazione

$$|L_N - L_D| = \frac{\delta}{2} \left| \frac{d^2 y}{dx^2} \right| + O(\delta^2) \quad (3.5.29)$$

dunque il metodo di Eulero è uno schema del prim'ordine.

Esaminiamo ora il problema della *convergenza*. Come già sottolineato, è assai raro potere verificare direttamente la convergenza di una soluzione numerica se non in casi particolarmente semplici, poiché non è in generale ottenibile una stima dell'errore associato alla soluzione numerica. Consideriamo il seguente problema modello:

$$\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{con } x_0 = 0 \quad (3.5.30 a, b)$$

cioè poniamo di risolvere un problema del tipo (3.5.11) con $f(x, y) = -\lambda y$ ($\lambda > 0$) utilizzando lo schema di Eulero.

Il problema modello ammette evidentemente la soluzione esatta $y_0 \exp(-\lambda x)$. La (3.5.25) si scrive, in tal caso,

$$y_{n+1} = y_n + \delta(-\lambda y_n) = y_n[1 - \lambda\delta] \quad (3.5.31)$$

Al generico passo n la soluzione numerica del problema (3.5.30) può dunque scriversi nella forma

$$y_n = y_{n-1}(1 - \lambda\delta) = y_{n-2}(1 - \lambda\delta)^2 = y_0(1 - \lambda\delta)^n \quad (3.5.32)$$

Dunque:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, n\delta \rightarrow x} y_n = \lim_{\delta \rightarrow 0, n\delta \rightarrow x} y_0[(1 - \lambda\delta)^{1/\delta}]^{n\delta} = y_0 e^{-\lambda x} \quad (3.5.33)$$

Nel caso del problema modello qui esaminato lo schema di Eulero è dunque convergente perché la soluzione numerica tende alla soluzione esatta per $\delta \rightarrow 0$. Tale risultato non è generalizzabile. Per lo schema di Eulero è tuttavia possibile una stima dell'errore associato alla soluzione numerica sotto opportune ipotesi sulla natura dell'errore e posto che la funzione $f(x, y)$ soddisfi ad alcune proprietà.

Procediamo ora alla verifica della *stabilità* dello schema di Eulero. Verifichiamo in particolare la modalità di propagazione dell'errore di arrotondamento (o imprecisione nei dati iniziali) nel generico passo di integrazione da n

a $n + 1$. Definiamo quindi gli errori della soluzione numerica rispettivamente al passo n e al passo $n + 1$ nella forma

$$\epsilon_n = y_n - \bar{y}_n \quad \epsilon_{n+1} = y_{n+1} - \bar{y}_{n+1} \quad (3.5.34a, b)$$

\bar{y} essendo la soluzione esatta (non arrotondata) dell'equazione numerica discreta. Sostituendo nella (3.5.25) si ha:

$$\bar{y}_{n+1} + \epsilon_{n+1} - \bar{y}_n - \epsilon_n = \delta f(x_n, \bar{y}_n + \epsilon_n) \quad (3.5.35)$$

Sviluppando in serie di Taylor il secondo membro della (3.5.35), assumendo piccolo il valore dell'errore ($\epsilon_n \ll 1$), e arrestando lo sviluppo al primo termine si ottiene:

$$\bar{y}_{n+1} + \epsilon_{n+1} - \bar{y}_n - \epsilon_n = \delta f(x_n, \bar{y}_n) + \epsilon_n \delta f_{,y}(x_n, \bar{y}_n) + O(\epsilon_n^2) \quad (3.5.36)$$

Poiché \bar{y} è soluzione esatta dell'equazione numerica (3.5.25) si ottiene, a meno di termini di ordine superiore,

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n [1 + \delta f_{,y}(x_n, \bar{y}_n)] \quad (3.5.37)$$

Perché il procedimento sia stabile occorre che l'errore non si amplifichi nel corso dell'integrazione, cioè $|\epsilon_{n+1}| \leq |\epsilon_n|$. La condizione di stabilità per lo schema di Eulero si scrive quindi

$$|1 + \delta f_{,y}| \leq 1 \quad (3.5.38)$$

Lo schema di Eulero è dunque stabile *sotto-condizione*, poiché la (3.5.38) pone la seguente condizione sull'entità del passo di integrazione δ .

$$f_{,y} \leq 0 \quad \delta \leq \frac{2}{|f_{,y}|} \quad (3.5.39a, b)$$

Nel caso del problema modello (3.5.30), la (3.5.37) si scrive

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n (1 - \lambda \delta) \quad (3.5.40)$$

cioè la condizione di stabilità diventa

$$\delta \leq \frac{2}{\lambda} \quad (3.5.41)$$

Tale condizione può risultare particolarmente restrittiva per elevati valori del parametro λ . Si noti che nel caso del problema modello, se la condizione

(3.5.39) non è soddisfatta, parallelamente al verificarsi della condizione di instabilità la soluzione dell'equazione numerica risulta *divergente*. Dunque, in tal caso, pur se lo schema numerico soddisfa alla condizione teorica di convergenza (come verificato più sopra), la soluzione numerica diverge se lo schema è instabile. Si noti che tale risultato non è valido in generale, è possibile cioè avere situazioni in cui la soluzione numerica risulta ugualmente convergente pur essendo lo schema instabile.

Nonostante la sua semplicità, lo schema di Eulero presenta quindi alcune importanti limitazioni che ne sconsigliano l'utilizzo, in particolare il basso ordine d'approssimazione e la sua potenziale instabilità che può richiedere l'utilizzo di passi di integrazione assai ridotti.

Una sua versione modificata è lo *schema di Eulero 'all'indietro'* nel quale la funzione $f(x, y)$ è assunta costante nel generico passo di integrazione da n a $n + 1$ e pari al suo valore nel nodo $n + 1$. Dunque si ha:

$$y_{n+1} = y_n + \delta f_{n+1} \quad (3.5.42)$$

Procedendo come in precedenza si può dimostrare che tale schema è *congruente e del primo ordine*. Si tratta però di uno schema implicito in quanto f_{n+1} presente a secondo membro della (3.5.42) è funzione dell'incognita y_{n+1} . Ciò non consente quindi, come nel caso dello schema di Eulero, la valutazione diretta di y_{n+1} , ma comporta la necessità di utilizzare un processo iterativo. La (3.5.42) è infatti, in generale, una equazione non lineare nell'incognita y_{n+1} . Normalmente tale processo iterativo di soluzione è effettuato utilizzando un metodo di *predizione-correzione*, nel quale il valore dell'incognita viene preassegnato e poi modificato utilizzando l'equazione stessa. In pratica si procede come segue:

- i) si pone $y_{n+1}^{(1)} = y_n$ ('predizione': valore di y_{n+1} di primo tentativo);
- ii) si calcola $y_{n+1}^{(2)}$ dalla (3.5.42) utilizzando $y_{n+1}^{(1)}$ per il calcolo di f_{n+1} ('correzione': valore di y_{n+1} di secondo tentativo);
- iii) si procede utilizzando $y_{n+1}^{(2)}$ per il calcolo di f_{n+1} e valutando dalla (3.5.42) un nuovo valore $y_{n+1}^{(3)}$; si ripete il procedimento finché la differenza fra due successive approssimazioni $y_{n+1}^{(k)}$ e $y_{n+1}^{(k+1)}$ della soluzione risulta minore di un errore preassegnato.

Si può ottenere una stima migliore del valore di primo tentativo utilizzando lo schema di Eulero come formula di 'predizione' in alternativa a quanto illustrato al punto i).

Tale metodo, pur essendo più complicato rispetto al metodo di Eulero, ha il vantaggio che la condizione di stabilità non comporta alcuna limitazione sul passo di integrazione δ . Infatti, procedendo come per il metodo di Eulero, si trova:

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n(1 - \delta f_{,y})^{-1} \quad (3.5.43)$$

cioè, avendo assunto $\delta \rightarrow 0$, lo schema è stabile se $f_{,y} \leq 0$ qualunque sia il valore del passo di integrazione δ .

Metodo di Euler-Cauchy

Mostriamo ora come sia possibile costruire uno schema a singolo passo che presenti caratteristiche migliori rispetto allo schema di Eulero, sia cioè caratterizzato da ordine di approssimazione più elevato. Dato un generico schema 'single-step'

$$y_{n+1} = a_0 y_n + \delta(b_{-1} f_{n+1} + b_0 f_n) \quad (3.5.44)$$

e sviluppando in serie di Taylor y_{n+1} e f_{n+1} rispetto al nodo n si ha

$$\begin{aligned} L_N = & \left(\frac{dy}{dx} \right)_n - f_n(b_0 + b_{-1}) + \frac{(1 - a_0)y_n}{\delta} + \delta \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_n \left(\frac{1}{2} - b_{-1} \right) + \\ & + \delta^2 \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)_n \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} b_{-1} \right) + O(\delta^3) \end{aligned} \quad (3.5.45)$$

L'errore di troncamento è di ordine δ^2 se sono verificate le condizioni

$$(1 - a_0) = 0 \quad b_0 + b_{-1} = 1 \quad b_{-1} = \frac{1}{2} \quad (3.5.46 a, c)$$

cioè se $a_0 = 1$, $b_{-1} = b_0 = 1/2$. Si ottiene quindi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \delta (f_{n+1} + f_n) = y_n + \frac{1}{2} \Delta x_n (f_{n+1} + f_n) \quad (3.5.47)$$

La (3.5.47) è nota con il nome di metodo del poligono modificato, ovvero come metodo di *Euler-Cauchy* (o *Crank-Nicholson*), ed equivale ad assumere per la funzione f il valore medio fra i valori assunti nei nodi n e $n + 1$ (figura 3.57). Si noti in particolare che lo schema di Euler-Cauchy è l'unico schema a singolo passo che sia del secondo ordine di approssimazione. Lo schema (3.5.47) è evidentemente implicito e richiede dunque un procedimento iterativo di soluzione analogo a quello descritto per lo schema (3.5.42), dove

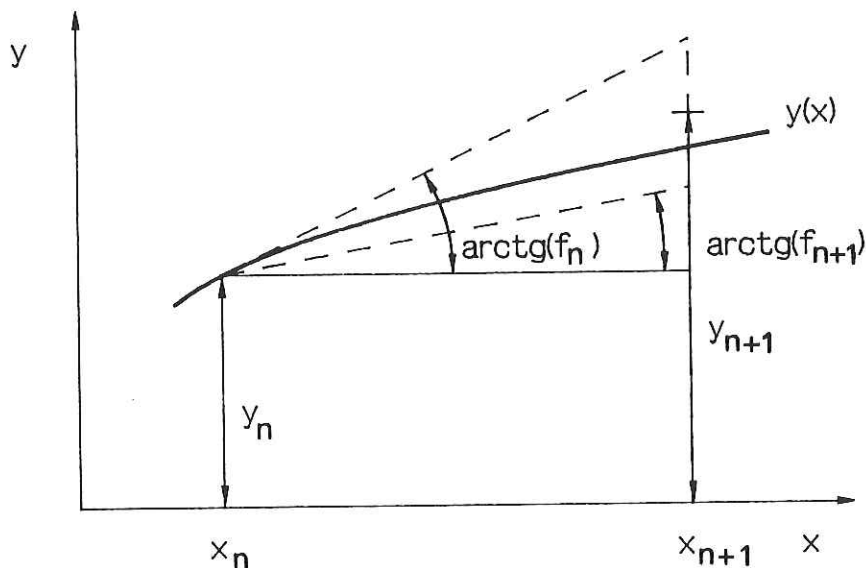


Figura 3.57: Il metodo del poligono modificato (Eulero-Cauchy).

si utilizza normalmente lo schema di Eulero per la stima del primo valore di tentativo

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \delta f_n \quad y_{n+1}^{(2)} = y_n + \frac{1}{2} \delta [f_n + f_{n+1}(y_{n+1}^{(1)})] \quad y_{n+1}^{(3)} = \dots \quad (3.5.48 a, c)$$

In tal caso si pone anche il problema della convergenza del procedimento iterativo di soluzione. Indicata con $\gamma^{(i)}$ la differenza fra due successive approssimazioni $y_{n+1}^{(i+1)}$ e $y_{n+1}^{(i)}$ della soluzione, si ottiene

$$\gamma^{(i)} = \frac{\delta}{2} [f_{n+1}(y_{n+1}^{(i)}) - f_{n+1}(y_{n+1}^{(i-1)})] \quad (3.5.49)$$

La condizione di Lipschitz pone

$$|\gamma^{(i)}| \leq \frac{\delta}{2} A |\gamma^{(i-1)}| \quad (3.5.50)$$

con A costante positiva. È dunque sufficiente supporre $\delta < 2/A$ perché il procedimento iterativo risulti convergente.

Per il metodo di Euler-Cauchy è ancora possibile effettuare una stima dell'errore associato alla soluzione numerica, considerando il solo errore di troncamento e introducendo rispetto al caso dello schema di Eulero l'ulteriore

condizione che anche la derivata seconda della funzione f sia lipschitziana. Si ricava

$$|\epsilon_n| \leq \frac{\delta^2}{4} \left(A_1 + \frac{A_2}{3A} \right) \frac{(1 + \delta A + (1/2)\delta^2 A^2)^n - 1}{1 + (1/2)\delta A} \quad (3.5.51)$$

con A_2 costante di Lipschitz per la derivata seconda di f . Anche in questo caso lo schema è convergente; inoltre, per x fissato, l'errore tende a zero quadraticamente con δ anziché linearmente come nel metodo di Eulero.

Verifichiamo infine la *stabilità* dello schema di Euler-Cauchy. Sostituendo nella (3.5.47) le definizioni (3.5.34) e sviluppando in serie di Taylor f_n e f_{n+1} (con $\epsilon \ll 1$), si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} + \epsilon_{n+1} - \bar{y}_n - \bar{\epsilon}_n &= \frac{1}{2}\delta [f(x_n, \bar{y}_n) + \epsilon_n f_{,y}(x_n, \bar{y}_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) + \\ &+ \epsilon_{n+1} f_{,y}(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] + O(\epsilon_n^2, \epsilon_{n+1}^2) \end{aligned} \quad (3.5.52)$$

Si noti che in tal caso all'errore ϵ dà contributo non solo l'arrotondamento ma anche il procedimento iterativo di soluzione (3.5.48) il quale evidentemente non raggiunge mai l'esatta convergenza. Poiché \bar{y} è soluzione numerica esatta delle (3.5.47) segue

$$\epsilon_{n+1} \left[1 - \frac{\delta}{2} f_{,y}(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) \right] = \epsilon_n \left[1 + \frac{\delta}{2} f_{,y}(x_n, \bar{y}_n) \right] \quad (3.5.53)$$

Dunque, assumendo $f_{,y}$ praticamente costante nell'intervallo Δx_n , cioè posto $f_{,y}(x_n, \bar{y}_n) = f_{,y}(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1}) = f_{,y}$, si ha

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n \frac{1 + (1/2)\delta f_{,y}}{1 - (1/2)\delta f_{,y}} \quad (3.5.54)$$

La condizione di stabilità $|\epsilon_{n+1}| \leq |\epsilon_n|$ si traduce quindi nella relazione

$$\left| 1 + \frac{1}{2}\delta f_{,y} \right| \leq \left| 1 - \frac{1}{2}\delta f_{,y} \right| \quad (3.5.55)$$

Poiché si è scelto $\delta > 0$, lo schema di Euler-Cauchy risulta incondizionatamente stabile purché risulti $f_{,y} \leq 0$, cioè la condizione di stabilità non pone alcun vincolo sul passo spaziale δ . Ciò costituisce un evidente vantaggio rispetto al metodo di Eulero, che si aggiunge a quello della più elevata precisione (schema del II ordine). Per tali motivi è senz'altro preferibile l'utilizzo dello schema (3.5.47) nonostante la soluzione non sia esplicita come nel più semplice schema di Eulero.

Si noti che il vincolo $f_{,y} \leq 0$ non costituisce una condizione restrittiva ma è conseguenza della scelta della direzione lungo la quale viene effettuata l'integrazione numerica. È immediato verificare che se risulta $\delta < 0$ (cioè se si integra in senso opposto lungo x) il metodo di Euler-Cauchy è incondizionatamente stabile purché risulti $f_{,y} \geq 0$.

Schemi multi-step

In uno schema a passo multiplo l'equazione differenziale di partenza viene approssimata con un'equazione alle differenze di ordine più elevato. A ciò corrisponde in generale un risultato più preciso, poiché maggiore può risultare l'ordine di approssimazione dello schema. Come dimostrato da Dahlquist (1956)¹⁴, nella soluzione numerica di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine con una formula lineare del tipo (3.5.20) l'ordine di approssimazione massimo che si può raggiungere è $2k$, se k è il numero di passi utilizzati (cioè l'ordine della equazione alle differenze), cioè aumenta al crescere della complessità dello schema utilizzato. Se si pone anche il vincolo della stabilità, il massimo ordine diventa $(k+1)$ se k è dispari e $(k+2)$ se k è pari. Lo schema di Euler-Cauchy conferma il risultato enunciato poiché costituisce lo schema a singolo passo che presenta il massimo ordine di approssimazione possibile compatibile con il requisito della stabilità.

Come già sottolineato gli schemi a passo multiplo, pur se più precisi, possono dar luogo a instabilità associate alla generazione di soluzioni spurie che ne rendono più problematico l'utilizzo. Consideriamo per esempio il più semplice schema a due passi descritto dall'operatore numerico

$$L_N = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\delta} - f_n \quad (3.5.56)$$

Si dimostra facilmente che lo schema è del II ordine. Applicando la (3.5.56) alla soluzione del problema modello (3.5.30) si ottiene

$$y_{n+1} + 2\delta\lambda y_n - y_{n-1} = 0 \quad (3.5.57)$$

la cui soluzione generale è

$$y_n = c_1 \left[-\delta\lambda + \sqrt{(\delta\lambda)^2 + 1} \right]^n + c_2 (-1)^n \left[\delta\lambda + \sqrt{(\delta\lambda)^2 + 1} \right]^n \quad (3.5.58)$$

Si noti come in tal caso sia necessario definire due costanti c_1 e c_2 pur essendo associata una sola condizione al contorno all'equazione differenziale. Occorre

¹⁴Dahlquist G. (1956) Math. Scand. 4.

ciò precisare il valore y_1 oltre al valore iniziale y_0 . Dalla (3.5.58) si può osservare che l'utilizzo di uno schema del II ordine comporta l'introduzione di una soluzione spuria. Infatti

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, n\delta \rightarrow x} y_n = c_1 e^{-\lambda x} + c_2 (-1)^n e^{\lambda x} \quad (3.5.59)$$

Accanto alla soluzione esponenzialmente decrescente, che è soluzione analitica esatta del problema modello, si genera una soluzione che si amplifica al crescere di n e tende a infinito con andamento oscillante. Lo schema (3.5.56) è in tal caso *instabile*, perché destinato ad amplificare gli errori (in tal caso la soluzione spuria) e a divergere dalla soluzione esatta. Si noti inoltre che pur potendosi precisare la condizione iniziale aggiuntiva su y_1 in modo tale da rendere soddisfatta la condizione $c_2 = 0$, l'inevitabile presenza di errori di arrotondamento condurrebbe comunque alla amplificazione della soluzione spuria. La presenza di tali soluzioni spurie è caratteristica degli schemi multi-step. Tuttavia non sempre tali soluzioni danno luogo a instabilità. Negli schemi multi-step stabili le eventuali soluzioni spurie si annullano al tendere a zero del passo di integrazione δ ; in tal caso si ha uno schema stabile e nello stesso tempo più preciso. Ne è esempio lo schema di *Adams-Moulton*

$$L_N = \frac{y_{n+1} - y_n}{\delta} - \frac{1}{2}(2f_{n+1} + f_{n-1} - f_n) \quad (3.5.60)$$

Altri metodi di soluzione

Il problema (3.5.11) può essere risolto attraverso schemi numerici più precisi ma anche più complessi rispetto ai procedimenti illustrati più sopra. È opportuno richiamare brevemente due fra i procedimenti più frequentemente utilizzati, rimandando il lettore interessato alla letteratura specializzata per un maggiore approfondimento.

Un primo schema di soluzione è basato sull'utilizzo di sviluppi in *serie di Taylor*. La soluzione nel nodo $n + 1$ si scrive nella forma

$$y_{n+1} = y(x_n + \delta) = y_n + \delta f(x_n, y_n) + \frac{\delta^2}{2!} f'(x_n, y_n) + \frac{\delta^3}{3!} f''(x_n, y_n) + \dots \quad (3.5.61)$$

dove l'apice individua la derivata (totale) rispetto a x .

Più frequentemente è utilizzato il metodo di *Runge-Kutta*, in particolare quando le derivate di f di ordine superiore presentano espressione analitica complicata. In tale schema la soluzione è espressa nella forma

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 + \dots + w_m k_m \quad (3.5.62)$$

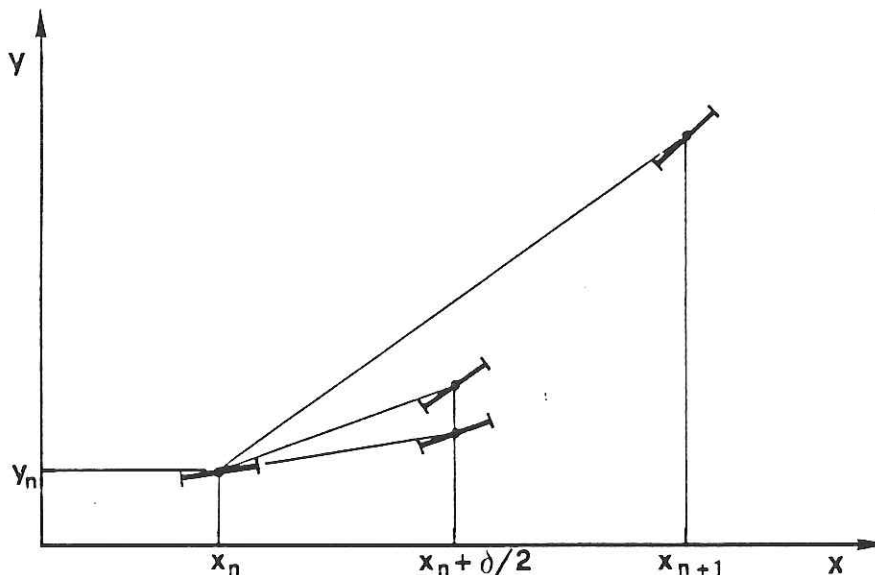


Figura 3.58: Interpretazione geometrica dello schema di Runge-Kutta.

dove i termini w_i sono coefficienti numerici e le quantità k_i richiedono la valutazione della funzione f in punti interni all'intervallo (x_n, x_{n+1}) . Lo schema di Runge-Kutta ha il vantaggio di presentare un ordine di approssimazione elevato pur richiedendo la valutazione ripetuta della sola funzione f e non delle sue derivate. In particolare, nello schema originario di Runge-Kutta illustrato in figura 3.58 si ha $m = 4$ e la (3.5.62) si scrive

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \quad (3.5.63)$$

con

$$k_1 = \delta f(x_n, y_n) \quad (3.5.64a)$$

$$k_2 = \delta f\left(x_n + \frac{\delta}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (3.5.64b)$$

$$k_3 = \delta f\left(x_n + \frac{\delta}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (3.5.64c)$$

$$k_4 = \delta f(x_n + \delta, y_n + k_3) \quad (3.5.64d)$$

Si può dimostrare che lo schema è del quarto ordine, cioè molto preciso.

f L'equazione dei profili di rigurgito

Per la soluzione numerica dell'equazione dei profili di rigurgito (3.5.10) si usano generalmente schemi a singolo passo, perché variabile è l'ubicazione delle sezioni, cioè il passo Δx_n . La soluzione numerica è ricavata passo passo in ogni sezione a partire da un assegnato valore della quota della superficie libera (condizione al contorno). Gli schemi più utilizzati sono dunque in tal caso il metodo di Eulero e, più frequentemente, lo schema di Euler-Cauchy. Quest'ultimo metodo di soluzione dell'equazione dei profili è noto nella letteratura anglosassone con il nome di *standard-step method*.

Nel caso subcritico l'integrazione procede da valle verso monte. Dunque, adottando lo schema di Eulero, si ha

$$h_{n+1} - h_n = \Delta x_n f(x_{n+1}, h_{n+1}) \quad (3.5.65a)$$

ovvero, secondo lo schema di Euler-Cauchy,

$$h_{n+1} - h_n = \frac{1}{2} \Delta x_n [f(x_n, h_n) + f(x_{n+1}, h_{n+1})] \quad (3.5.65b)$$

attraverso le quali, noto il livello del pelo libero h_{n+1} si determina (nel primo caso direttamente, nel secondo con il procedimento iterativo illustrato in precedenza) il livello del pelo libero nella sezione n immediatamente a monte.

Prima di discutere la questione della stabilità degli schemi numerici utilizzati per la soluzione dell'equazione dei profili è opportuno ribadire la distinzione fra *instabilità numerica* e *instabilità fisica*. Quest'ultima dipende essenzialmente dal senso lungo il quale viene condotta l'integrazione ed è conseguenza del fatto che una corrente lenta è controllata da valle e, viceversa, una corrente veloce è controllata da monte. Ciò equivale ad affermare che le condizioni al contorno, dalle quali evidentemente dipende il senso dell'integrazione, devono essere imposte correttamente a valle o a monte a seconda che la corrente sia subcritica o supercritica rispettivamente. Se questa regola non viene osservata la soluzione numerica risulta particolarmente sensibile a piccole variazioni nelle condizioni iniziali e nei dati, qualunque sia lo schema numerico utilizzato, e può quindi diventare instabile. A differenza di tale instabilità fisica, l'instabilità numerica si manifesta quando, pur integrando l'equazione dei profili nella direzione corretta, lo schema utilizzato conduce all'amplificazione degli errori numerici.

Nel caso subcritico, cioè quando si integra da valle verso monte, le condizioni di stabilità (3.5.38) e (3.5.55) si riscrivono nella forma

$$|1 - \Delta x_n f_{,h}| \leq 1 \quad \left| \frac{1 - (1/2)\Delta x_n f_{,h}}{1 + (1/2)\Delta x_n f_{,h}} \right| \leq 1 \quad (3.5.66a, b)$$

rispettivamente per lo schema di Eulero e per lo schema di Euler-Cauchy. Si noti che si ha $f_{,h} > 0$ per alvei fluviali e $f_{,h} < 0$ nel caso di alvei torrentizi. Per esempio nel caso di alvei rettangolari larghi la (3.5.7) si scrive

$$\frac{dh}{dx} = f(h) = i_f \frac{Y_c^3 - Y_u^3}{Y^3 - Y_c^3} \quad (3.5.67)$$

Quindi $f_{,h} > 0$ se $Y_u > Y_c$, cioè se l'alveo è fluviale, e viceversa se torrentizio.

Le (3.5.66) implicano che entrambi gli schemi numerici risultano sempre instabili per alvei torrentizi. Ciò è conseguenza di quella che abbiamo definito come instabilità fisica. Si osservi in particolare che anche l'integrazione di un profilo di corrente lenta in alveo torrentizio può dar luogo a instabilità pur se l'integrazione è condotta in senso corretto, cioè a partire dalla condizione di valle. In tal caso infatti il profilo tende a disporsi verticalmente avvicinandosi alla profondità critica: qualsiasi errore introdotto da valle viene dunque amplificato in prossimità della profondità critica, dove comunque la relazione (3.5.7) non è più significativa. Dal punto di vista dell'instabilità numerica, se $f_{,h}$ è positiva, lo schema di Euler-Cauchy risulta sempre stabile qualunque sia il passo Δx_n mentre lo schema di Eulero è stabile sotto-condizione, cioè se $0 \leq f_{,h} \Delta x_n \leq 2$. Analoghe considerazioni si applicano nel caso di correnti supercritiche.

In margine alle questioni legate agli errori introdotti dalla soluzione numerica, è opportuno sottolineare che un'importante fonte di errore nella determinazione dei profili risiede nella imprecisione dei dati; in particolare, l'incertezza sulla reale geometria dell'alveo e sulle caratteristiche di scabrezza introduce generalmente errori che sono assai più rilevanti di quelli associati allo schema numerico posto che il passo spaziale Δx_n adottato sia ragionevolmente contenuto e che sia stato scelto correttamente il senso di integrazione (un esempio è riportato in figura 3.59).

Un'ulteriore difficoltà si incontra nella modellazione numerica di situazioni in cui si verificano transizioni da corrente supercritica a subcritica e viceversa, perché ciò richiede particolari accorgimenti non essendo più valido lo schema matematico adottato quando le variazioni della superficie libera sono rapide. Per esempio nel primo caso è necessario localizzare e quantificare il risalto idraulico utilizzando le consuete relazioni.

Nell'ambito della modellazione monodimensionale è inoltre possibile incorporare perdite di carico addizionali, rispetto alle resistenze d'attrito, associate per esempio a variazioni planimetriche o alla presenza di ostacoli

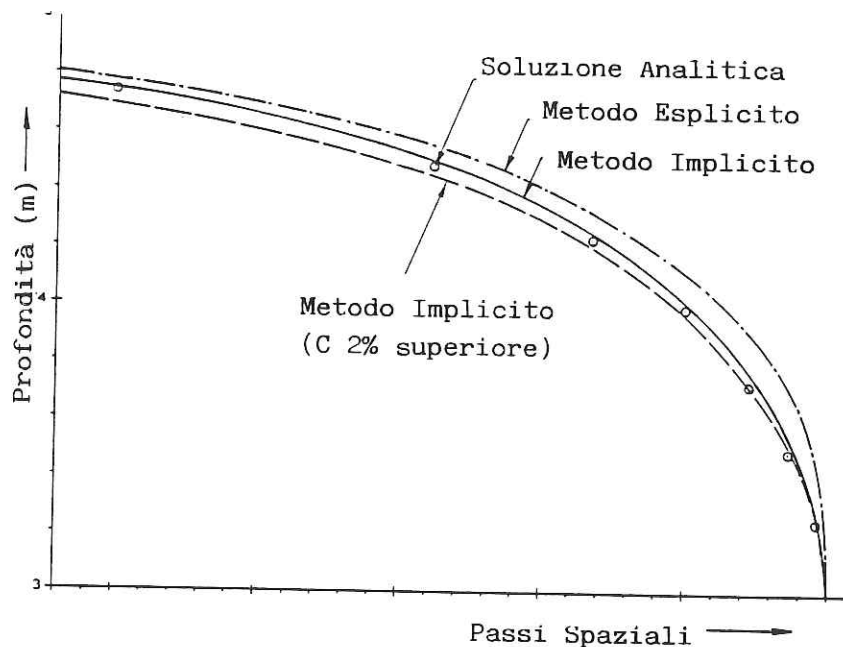


Figura 3.59: Esempio di soluzione numerica dell'equazione dei profili: $Q/b = 12.38 \text{ m}^2/\text{s}$; $i_f = .0005$; $C = 15.8$; $\Delta x = 150 \text{ m}$; $Y_c = 2.5 \text{ m}$; $Y_u = 5 \text{ m}$. Confronto fra soluzione analitica, soluzione numerica implicita (Eulero-Cauchy), soluzione numerica esplicita (Eulero) e soluzione implicita con C superiore del 2% (curva tratteggiata).

(brusche variazioni di sezione, ponti, ecc.). In letteratura sono disponibili numerose relazioni semiempiriche che si possono ricondurre alla relazione generale

$$H_m = H_v + \xi \frac{U^2}{2g} \quad (3.5.68)$$

dove H è il carico totale, m e v indicano rispettivamente monte e valle del tronco interessato dalla perdita di carico concentrata, U è una velocità rappresentativa e ξ un coefficiente empirico che varia a seconda della situazione in esame. Tali effetti vanno aggiunti separatamente durante l'integrazione numerica con l'introduzione di condizioni al contorno interne: l'integrazione è condotta fino alla sezione dove si vuole imporre la perdita di carico concentrata, cioè fino alla determinazione di h_v nel caso di corrente lenta; quindi si utilizza la (3.5.68) per valutare H_m , da cui si ricava h_m che costituisce la condizione al contorno necessaria per proseguire l'integrazione numerica

verso monte.

La presenza di ramificazioni o biforcazioni è ancora trattabile in ambito monodimensionale facendo ricorso a procedimenti iterativi. In tale caso infatti è nota in generale la portata complessiva, ma non è noto a priori come tale portata si suddivida in corrispondenza della biforcazione. La determinazione delle portate nei singoli rami, e quindi il calcolo del profilo, si effettua ricordando che il carico h nel punto di biforcazione è univocamente definito. Dunque, assegnati valori di tentativo per le portate nei diversi rami, si calcola il profilo di rigurgito in ciascun ramo a partire dalle assegnate condizioni al contorno di valle e si verifica l'uguaglianza dei valori del carico h relativi al punto di biforcazione ottenuti con i diversi profili. È poi possibile introdurre come nel caso delle correnti in pressione opportune relazioni che consentono una scelta ottimale della correzione da apportare al valore di tentativo delle portate nei diversi rami per ottenere una rapida convergenza del procedimento iterativo.

Capitolo 4

CORRENTI NON STAZIONARIE A SUPERFICIE LIBERA

4.1 Preliminari: onde iperboliche e onde dispersive

a Onde

Lo studio dei moti non stazionari a superficie libera riguarda essenzialmente la propagazione di onde.

In termini del tutto generali un'onda consiste nella propagazione di un segnale attraverso un qualsiasi mezzo materiale (nel caso qui esaminato il mezzo è un liquido) con una distinta velocità di propagazione. Il segnale (qui una variazione di quota della superficie libera) può, nel corso della propagazione, subire variazioni di forma, intensità e velocità di propagazione.

I meccanismi fisici che sottendono i diversi fenomeni di propagazione sono ovviamente differenti sicché le diverse onde possono essere classificate sulla base di tali meccanismi. Si parla perciò di onde acustiche, onde elastiche, onde elettromagnetiche, onde di gravità (nei fluidi), onde di densità (nei fluidi non omogenei), etc.

Nell'ambito delle onde appartenenti a una delle classi menzionate si possono poi distinguere tipologie diverse sulla base della causa primaria della perturbazione. Si distinguono così le onde di mare (originate dall'azione del vento), dalle onde di marea (originate dall'attrazione lunare) e dalle onde di piena (determinate dagli afflussi provenienti dalle diverse porzioni di un bacino afferenti a un corso d'acqua).

Vi è poi un criterio più generale che consente di classificare i diversi fenomeni ondosi: esso è fondato sulla natura delle equazioni matematiche

che governano il fenomeno (le onde iperboliche sono rette da equazioni alle derivate parziali dette appunto iperboliche) o sulla natura delle soluzioni del problema matematico (soluzioni dispersive, nel senso che preciseremo, caratterizzano appunto le onde dispersive).

b Natura iperbolica del sistema differenziale che governa il moto delle correnti nel modello 1-D

Esaminiamo il sistema differenziale che descrive la propagazione di onde unidimensionali nelle correnti a superficie libera.

Il sistema in esame è dato dalle (1.4.20) e (1.4.22). Se si adottano come variabili indipendenti x e t e come variabili dipendenti h e U tale sistema si scrive

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Omega}{b} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{U}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h = 0 \quad (4.1.1)$$

$$g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + jg = 0 \quad (4.1.2)$$

avendo assunto l'alveo non necessariamente cilindrico.

Con riferimento alla (1.6.9) si ha in questo caso

$$\begin{aligned} f_1 &= h & f_2 &= U \\ A_{11} &= U & A_{12} &= \frac{\Omega}{b} & B_1 &= \frac{U}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h \\ A_{21} &= g & A_{22} &= U & B_2 &= jg \end{aligned} \quad (4.1.3a - h)$$

donde la (1.6.14) assume la forma

$$\begin{vmatrix} U - c & \Omega/b \\ g & U - c \end{vmatrix} = (U - c)^2 - \frac{g\Omega}{b} = 0 \quad (4.1.4)$$

da cui

$$c_{\pm} = U \pm \sqrt{g \frac{\Omega}{b}} \quad (4.1.5)$$

Le (4.1.5) mostrano che il sistema (4.1.1)-(4.1.2) è *iperbolico*. Il sistema stesso si trasforma, sulle curve caratteristiche, in un sistema alle derivate totali. Dalla (1.6.12) si ottiene

$$c_{\pm} = \frac{dx}{dt} = U \pm \sqrt{\frac{g\Omega}{b}} \quad (\text{Equazioni delle caratteristiche}) \quad (4.1.6)$$

e inoltre, ponendo per es. $l_1 = 1$, nella relazione (1.6.13), segue

$$A_{12} + l_2(A_{22} - c) = 0 \quad (4.1.7a)$$

cioè

$$l_2 = \pm \sqrt{\frac{\Omega}{gb}} \quad (4.1.7b)$$

Le equazioni dei cosiddetti *invarianti di Riemann* del problema definiti dalle (1.6.11) diventano quindi

$$\frac{dh}{dt} - \frac{\Omega/b}{U - c_{\pm}} \frac{dU}{dt} + \frac{U}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h - g \frac{\Omega/b}{U - c_{\pm}} j = 0 \quad (4.1.8a, b)$$

o

$$\frac{dU}{dt} \pm \sqrt{\frac{gb}{\Omega}} \frac{dh}{dt} \pm \sqrt{\frac{g}{\Omega b}} U \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_h + gj = 0 \quad (4.1.9a, b)$$

c Le onde iperboliche nelle correnti come 'onde su acqua bassa'

Il sistema (4.1.6), (4.1.9) sarà oggetto di analisi nel seguito. E' qui opportuno ricordare che le ipotesi sulle quali è fondato il modello unidirezionale che conduce al sistema (4.1.1, 4.1.2) equivalgono all'ipotesi che la distribuzione della pressione risulti idrostatica. Come si è visto ciò equivale a commettere un errore $O(\delta^2 F_o^2)$ nella valutazione di $\partial h / \partial y$ (e, quindi, di $\partial h / \partial x$) dove F_o è il numero di Froude caratteristico del moto longitudinale e δ è il rapporto fra la profondità caratteristica della corrente Y_o e la scala spaziale L sulla quale avvengono le variazioni longitudinali delle grandezze che caratterizzano il moto. Dunque l'errore relativo commesso utilizzando la forma (4.1.2) dell'equazione longitudinale del moto è

$$O \left(\frac{g \delta_o^2 F_o^2 Y_o / L}{U_o^2 / L} \right) = \frac{\text{ordine termine gravitazionale } gh_{,x}}{\text{ordine termine inerziale } UU_{,x}}$$

cioè deve risultare

$$\delta_o^2 = \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \ll 1 \quad (4.1.10)$$

affinché l'approssimazione su cui è fondato il sistema (4.1.1), (4.1.2) risulti lecita. Nell'ambito della teoria delle onde tale approssimazione è denominata delle *onde su basse profondità*. Vedremo che tale approssimazione corrisponde alla propagazione di onde in cui sono *assenti effetti di dispersione*.

d Onde dispersive

Veniamo alla classe di fenomeni ondosi descritti dalla denominazione dispersivi.

Si dice che un sistema lineare è di tipo *dispersivo* se ammette in generale soluzioni elementari della forma

$$f = a \cos(kx - \omega t) \quad (4.1.11)$$

La (4.1.11) rappresenta un'onda sinusoidale di ampiezza a , periodo $T \equiv 2\pi/\omega$ con ω pulsazione (o frequenza angolare), lunghezza d'onda $L = 2\pi/k$ con k numero d'onda e velocità di fase $\omega(k)/k$. Tale onda è di *carattere dispersivo* se la velocità di fase è funzione di k . In altre parole la denominazione di onde dispersive è legata al fatto fisico per cui un'onda lineare di questo tipo, risultando dalla sovrapposizione di onde elementari del tipo (4.1.11), vede nel corso della propagazione una dispersione dei singoli modi che si propagano con celerità diversa.

Una definizione più precisa di onde dispersive impone la non-costanza della derivata $\omega' \equiv d\omega/dk$, cioè la condizione

$$\omega''(k) \neq 0 \quad (4.1.12)$$

La categoria delle onde dispersive è forse quella più ricca di esempi nella Fisica Matematica. Fra essi il più familiare, e anche il più importante, è quello delle onde di mare, per le quali il carattere dispersivo è originato dalle peculiari condizioni al contorno. Esaminiamolo brevemente.

Il campo di moto associato alla propagazione di onde di gravità in una massa liquida delimitata da una superficie libera si studia assumendo il moto irrotazionale. Tale ipotesi discende dal carattere onduoso del fenomeno: la vorticità originata in corrispondenza della superficie e del fondo (se la profondità non è talmente grande da non risentire del moto originato in superficie) diffonde in direzione verticale nella forma di un'onda viscosa che cambia verso di propagazione a ogni semiperiodo. Per profondità grandi rispetto allo spessore caratteristico degli strati di fondo e di superficie il moto può ritenersi sensibilmente irrotazionale al di fuori di tali strati.

Lo spessore caratteristico degli strati limite viscosi oscillanti è, in regime laminare, di ordine di grandezza $\sqrt{\nu/\omega}$, essendo ν la viscosità cinematica del liquido e ω la frequenza angolare caratteristica dell'onda. In regime turbolento lo spessore può risultare di un ordine di grandezza maggiore. In entrambi i

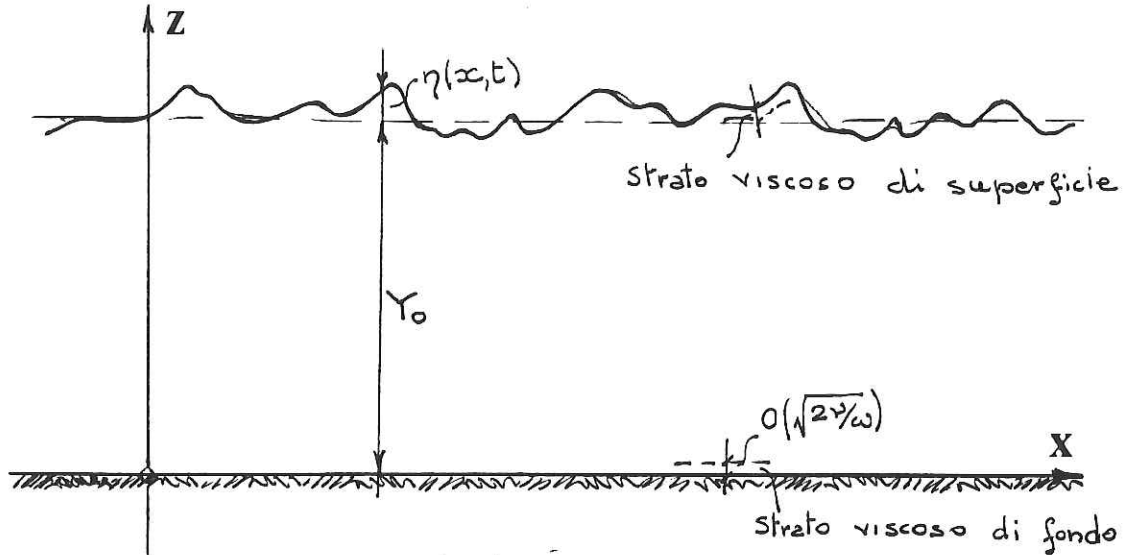


Figura 4.1:

casi, tuttavia, per i periodi caratteristici delle onde di mare (dell'ordine della decina di secondi) lo spessore caratteristico degli strati vorticosi di fondo e di superficie non eccede il centimetro.

Ciò premesso, il problema del moto di un'onda di gravità evolvente su fondo orizzontale si formula, con riferimento alle notazioni in figura 4.1, nella forma

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (0 < z < Y_0 + \eta) \quad (4.1.13a)$$

$$\Phi_{,t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + g\eta = 0 \quad (z = Y_0 + \eta) \quad (4.1.13b)$$

$$\eta_{,t} + \Phi_{,x}\eta_{,x} - \Phi_{,z} = 0 \quad (z = Y_0 + \eta) \quad (4.1.13c)$$

$$\Phi_{,z} = 0 \quad (y = 0) \quad (4.1.13d)$$

avendo indicato con Φ il potenziale di velocità, assunto l'onda propagantesi su un fluido altrimenti in quiete e posta la curvatura della superficie sufficientemente modesta da non indurre apprezzabili effetti della tensione superficiale. La (4.1.13b) rappresenta la condizione dinamica $p = 0$ che deve vigere sulla superficie libera del liquido in assenza di effetti di tensione superficiale ed avendo trascurato gli effetti viscosi. Alla (4.1.13b) si perviene imponendo appunto la condizione $p = 0$ nella relazione che esprime il teorema di Bernoulli

in moto irrotazionale non stazionario:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{v^2}{2} + \phi_{,t} \Big|_{z=Y_o+\eta} = \text{cost.} \quad (4.1.13e)$$

e assumendo la quantità $(\text{cost.} - gY_o)$ nulla data l'arbitrarietà nella scelta di cost. La (4.1.13c) rappresenta la condizione cinematica al contorno che impone che la superficie libera sia una superficie materiale. Ricordiamo infatti che tale condizione implica il soddisfacimento della relazione

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} \Big|_{\mathcal{F}=0} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathcal{F} \Big|_{\mathcal{F}=0} = 0 \quad (4.1.13f)$$

essendo $\mathcal{F} = z - (Y_o + \eta(x, y, t)) = 0$ l'equazione della superficie libera. Sul fondo la (4.1.13d) impone che risulti nulla la componente normale di velocità.

Al fine di mostrare il carattere dispersivo del problema è opportuno linearizzare le (4.1.13), considerare cioè onde di ampiezza infinitesima. Posto dunque che η e Φ risultino infinitesime, le (4.1.13a-d) diventano:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (4.1.14a)$$

$$\Phi_{,t} + g\eta = 0 \quad (z = Y_o) \quad (4.1.14b)$$

$$\eta_{,t} - \Phi_{,z} = 0 \quad (z = Y_o) \quad (4.1.14c)$$

$$\Phi_{,z} = 0 \quad (z = 0) \quad (4.1.14d)$$

Si noti che il processo di linearizzazione che conduce dalla (4.1.13) alle (4.1.14) presenta un duplice aspetto:

- i) vengono trascurati i termini quadratici nella (4.1.13):
- ii) viene confusa la superficie libera con il piano $z = Y_o$ nella condizione al contorno.

L'operazione ii) equivale a sviluppare le funzioni η e Φ in serie di Taylor in un intorno di $z = Y_o$ arrestandosi al primo termine.

Le (4.1.14a-d) ammettono soluzioni dispersive del tipo

$$\eta = a \exp [i(kx - \omega t)] + c.c. \quad (4.1.15)$$

$$\Phi = F(z) \exp [i(kx - \omega t)] + c.c. \quad (4.1.16)$$

con k numero d'onda, ω frequenza angolare e a ampiezza (infinitesima) dell'onda (c.c. denota il complesso coniugato di un numero complesso). Si noti che le (4.1.15), (4.1.16) rappresentano onde piane che si propagano in direzione x e costituiscono casi particolari di soluzioni dispersive più generali,

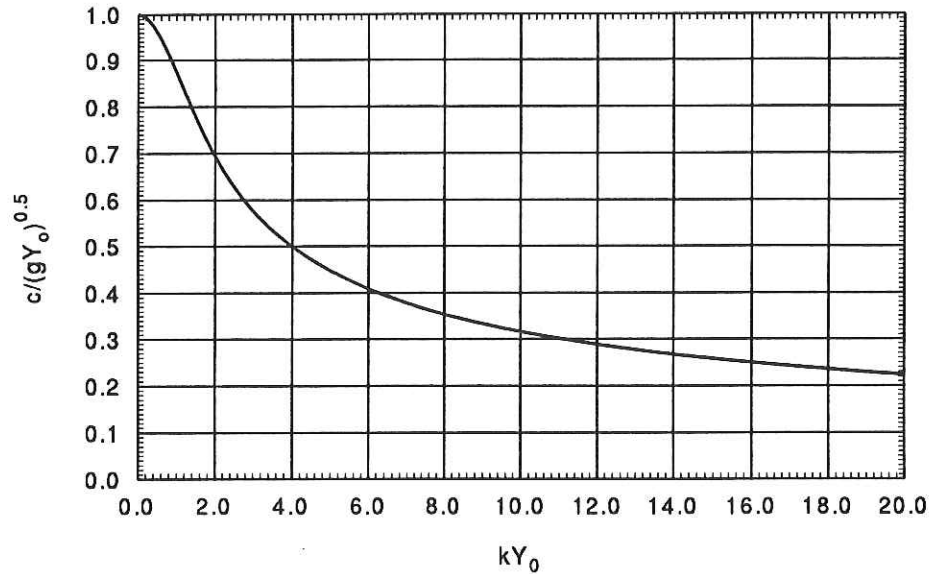


Figura 4.2:

rappresentative di onde di numero d'onda $\mathbf{k} \equiv (k_x, k_y)$ che si propagano in direzione obliqua rispetto al riferimento utilizzato.

Sostituendo le (4.1.15), (4.1.16) nelle (4.1.14) si trova

$$F'' - k^2 F = 0 \quad [F']_{z=0} = 0 \quad [-\omega^2 F + gF']_{z=Y_0} = 0 \quad (4.1.17a - c)$$

Le (4.1.17a,b) ammettono la soluzione

$$F = F_0 \cosh(kz) \quad (4.1.18)$$

con F_0 costante non determinabile (cioè arbitraria purché infinitesima) nell'ambito della teoria lineare. Sostituendo la (4.1.18) nella (4.1.17c) si ottiene la seguente relazione fra pulsazione e numero d'onda

$$\omega^2 = gk \tanh(kY_0) \quad (4.1.19)$$

che è la *relazione di dispersione* delle onde di mare (fig. 4.2).

Il carattere dispersivo di queste ultime è evidente per onde su profondità sufficientemente elevata rispetto alla lunghezza.

In particolare per *profondità grandi* ($kY_0 \rightarrow \infty$) la (4.1.19) diventa

$$\omega^2 = gk \quad (4.1.20a)$$

cioè

$$T = \sqrt{\frac{2\pi L}{g}} \quad (4.1.20b)$$

Viceversa per $kY_o \rightarrow 0$ la (4.1.19) diventa

$$\omega = \sqrt{gY_o}k \quad (4.1.21)$$

si ritrova cioè la classe di *onde iperboliche su basse profondità* esaminate al punto b). Si noti inoltre come si ritrovi anche la condizione (4.1.10) che caratterizza tale classe di onde. Sviluppando infatti $\tanh(kY_o)$ in serie di Mc Laurin si ottiene:

$$\tanh(kY_o) = kY_o + O(kY_o)^3 \quad (4.1.22)$$

I termini del terz'ordine nella (4.1.22) risultano trascurabili rispetto a quello del primo ordine se $(kY_o)^2 \ll 1$, cioè se è verificata la (4.1.10).

Concludendo, gli effetti dispersivi scompaiono al prim'ordine di approssimazione nel caso di *onde lunghe* (o *su bassa profondità*).

4.2 Onde iperboliche nelle correnti

Appartengono a queste categoria le *onde di piena* che si propagano nei corsi d'acqua, le *onde di marea* che si propagano negli estuari o nei canali lagunari, e in generale onde caratterizzate da lunghezze assai maggiori della profondità media della corrente.

Per tutti questi casi la teoria proposta nel §4.1 fornisce un metodo generale di soluzione che può essere utilizzato avvalendosi di un elaboratore numerico.

Prima di esaminare questo procedimento generale è tuttavia opportuno analizzare alcuni procedimenti approssimati che hanno il pregio di una maggior semplicità consentendo di mettere in luce i fenomeni principali che si presentano nella propagazione di onde iperboliche.

a L'approssimazione cinematica: distorsione e irripidimento dell'onda

Consideriamo dunque le (4.1.1, 2) e poniamole nella forma valida nel caso di alveo cilindrico a pendenza costante.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4.2.1a)$$

$$g \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = g i_f - \frac{Q^2}{\Omega^2 C^2 R_i} \quad (4.2.1b)$$

con C coefficiente di Chèzy adimensionale.

La più radicale approssimazione operabile nelle (4.2.1) è quella nota come *approssimazione dell'onda cinematica* in cui si trascurano gli effetti inerziali e quello gravitazionale indotto dal non parallelismo fra superficie libera e fondo, sicché l'equazione dinamica si traduce in un bilancio fra azioni gravitazionali associate alla pendenza del fondo e azioni tangenziali agenti sul perimetro bagnato. In altre parole si assume il moto 'localmente' uniforme sicché la (4.2.1b) può anche essere espressa nella forma di una scala di deflusso del tipo

$$Q = k\Omega^m \quad (4.2.2)$$

che assume il ruolo di legge dinamica. Si osservi che il caso di *alveo non cilindrico* può considerarsi ancora retto dalla (4.2.2) con k ed m funzioni di x . Segue, per questo caso generale, il sistema

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{\Omega} \quad (4.2.3a)$$

$$Q = k(x) [\Omega(x, t)]^{m(x)} \quad (4.2.3b)$$

Nel caso di *alveo cilindrico* risulta invece:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{dQ}{d\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \quad (4.2.4a)$$

$$Q = k\Omega^m \quad (4.2.4b)$$

Concentriamo ora la nostra attenzione sul sistema (4.2.4). Se si avesse $dQ/d\Omega$ costante (circostanza del tutto non realistica a meno di considerare onde di piccola ampiezza), posto

$$c_o = \frac{dQ}{d\Omega} \quad (4.2.5)$$

il sistema (4.2.4) ammetterebbe la soluzione generale

$$\Omega = f(x - c_o t) \quad (4.2.6)$$

con f funzione arbitraria. Ciò equivarrebbe a ricavare la soluzione per ogni specifico problema semplicemente imponendo che la (4.2.6) soddisfi alle particolari condizioni iniziali o al contorno.

Si noti che la soluzione (4.2.6) non è di tipo dispersivo poiché la celerità c_o non risulta funzione del numero d'onda k ma bensì si mantiene costante.

La (4.2.6) descrive un moto propagatorio caratterizzato da configurazione iniziale $f(x)$ che viene traslata di una distanza $c_0 t$ all'istante generico t . Tale traslazione mantiene inalterata la forma dell'onda.

Il caso non lineare, retto dall'equazione

$$\Omega_{,t} + c(\Omega)\Omega_{,x} = 0 \quad c = \frac{dQ}{d\Omega} \quad (4.2.7a, b)$$

è assai ricco di implicazioni e contiene tutti o gran parte degli ingredienti tipici delle onde iperboliche non lineari. Sono numerosi i settori della Fisica-Matematica e dell'Ingegneria in cui si incontrano fenomeni propagatori retti dalla (4.2.7). Esempi sono il moto dei ghiacciai, processi di scambio oggetto della cromatografia, le onde di traffico interpretate per mezzo di un approccio continuo.

La soluzione della (4.2.7) può ottenersi considerando la funzione $\Omega(x, t)$ in ciascun punto del piano (x, t) e osservando che lungo ciascuna curva C del piano orario su cui si ha

$$\frac{dx}{dt} = c(\Omega) \quad (4.2.8)$$

la (4.2.7a) impone la costanza della funzione Ω . Ciò implica che il secondo membro della (4.2.8) risulta costante e che le curve C sono in realtà rette caratterizzate da pendenza $c(\Omega)$. Si noti che lungo ciascuna curva C risulta costante la portata Q oltreché l'area della sezione Ω .

Assegnata una condizione al contorno del tipo

$$\Omega(0, t) = \Omega_o(t) \quad (4.2.9)$$

la soluzione generale può porsi nella forma:

$$\Omega(x, t) = \Omega_o(\tau) \quad (4.2.10)$$

con τ definito implicitamente dalla relazione

$$t = \tau + \frac{x}{c[\Omega_o(\tau)]} \quad (4.2.11)$$

La costruzione in figura 4.3 illustra il fenomeno della propagazione. Il carattere crescente della funzione $c(\Omega)$ implica che l'onda di piena tende progressivamente a irripidirsi e può teoricamente produrre una soluzione a più valori: ciò corrisponde al manifestarsi del fenomeno del frangimento dell'onda. Il processo di irripidimento è anch'esso illustrato nella costruzione grafica di figura 4.3.

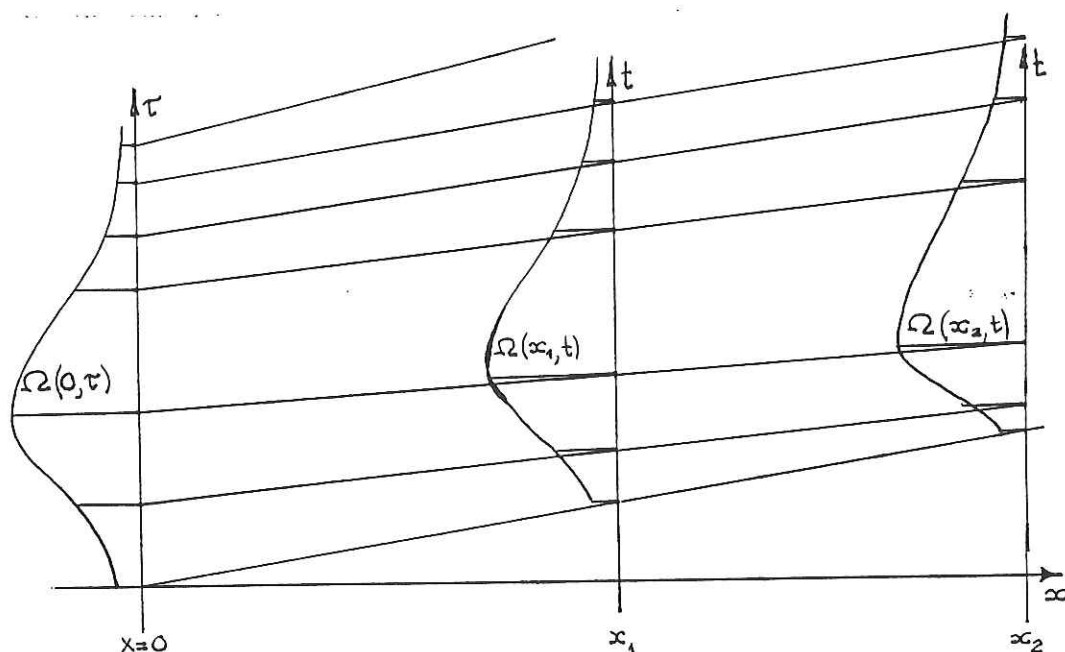


Figura 4.3:

Alternativamente l'irripidimento può essere analizzato nel piano (Ω, x) (figura 4.4). La costanza di Ω sulle (4.2.8) può infatti così enunciarsi: *valori crescenti di Ω si propagano con celerità crescente $c(\Omega)$* . E' proprio tale dipendenza di c da Ω che produce la distorsione non lineare della forma d'onda.

Alcune osservazioni si impongono sulla significatività di questo modello. Anzitutto il problema differenziale, originariamente del II ordine, si è ridotto a un problema del I ordine. Corrispondentemente le famiglie di caratteristiche associate al problema si riducono a una sola, che descrive la trasmissione di informazioni solo nella direzione di valle. Ciò implica che, per una corretta formulazione del problema, è sufficiente conoscere una sola condizione 'al contorno' $\Omega(0, t)$ ($t > 0$) oltre alla condizione iniziale. È però evidente l'impossibilità per il modello di riprodurre effetti di rigurgito verso monte, informazioni cioè provenienti da valle.

Una seconda limitazione del modello riguarda l'evoluzione della forma d'onda: la costanza di Ω lungo le caratteristiche implica che l'onda va deformandosi *ma non si attenua*. L'assenza di effetti dissipativi induce conseguenze significative sull'evoluzione del fronte d'onda. In particolare se si definisce la condizione di frangimento come quella in cui il fronte d'onda presenta un punto a tangente verticale, è evidente che il modello continuo adottato cessa

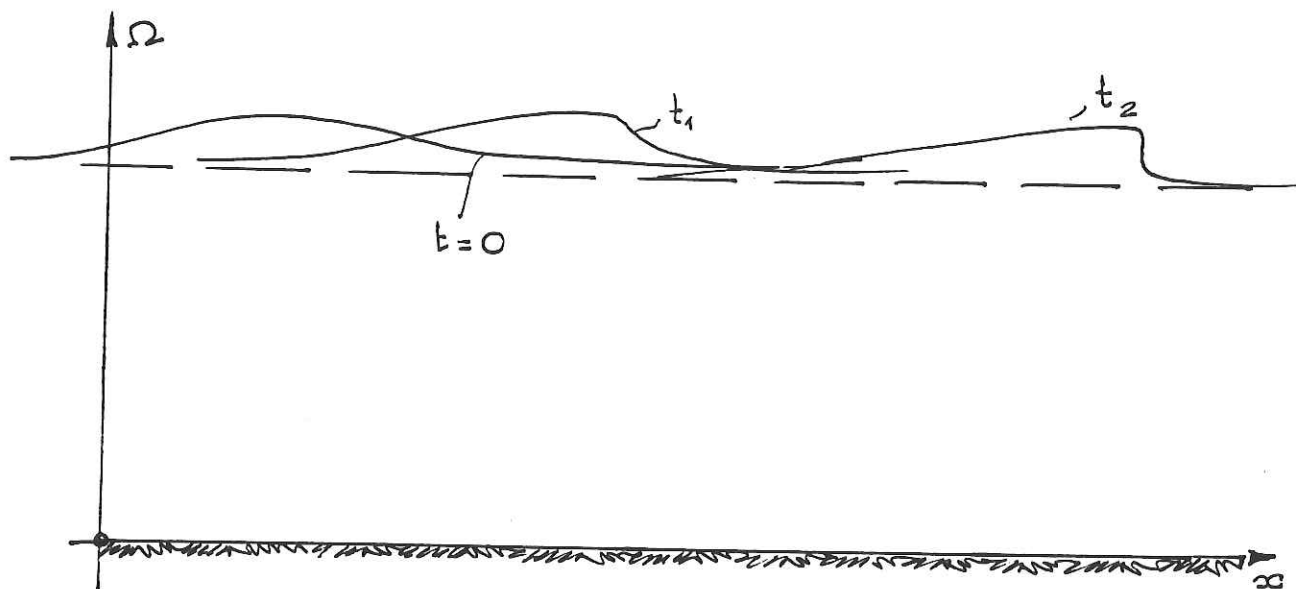


Figura 4.4:

di essere valido dall'istante in cui tale condizione si verifica.

In altre parole il modello dell'onda cinematica predice la formazione di un *fronte discontinuo*, cioè di un risalto che si propaga verso valle. L'istante in cui ciò si verifica può agevolmente calcolarsi facendo appello alla soluzione (4.2.10-4.2.11). Derivando la (4.2.11) rispetto a x e t , essendo τ funzione di x e t , segue

$$1 = t c_{,\tau} \tau_{,x} - c_{,\tau} \tau_{,x} \tau - c \tau_{,x} \quad 0 = c + (t - \tau) c_{,\tau} \tau_{,t} - c \tau_{,t} \quad (4.2.12a, b)$$

donde

$$\tau_{,t} = -\frac{c^2}{c_{,\tau} x - c^2} \quad \tau_{,x} = \frac{c}{x c_{,\tau} - c^2} \quad (4.2.13a, b)$$

Essendo inoltre

$$\Omega_{,x} = \Omega_{,\tau} \tau_{,x} \quad \Omega_{,t} = \Omega_{,\tau} \tau_{,t} \quad (4.2.14a, b)$$

ne consegue che $\Omega_{,x}$ tende a infinito su ciascuna caratteristica su cui $c_{,\tau}$ è positiva e tale che

$$x = \frac{c^2}{c_{,\tau}} \quad (4.2.15)$$

È facile mostrare che la sezione in cui si manifesta il frangimento è tanto più lontana quanto più lento è il processo di formazione dell'onda e quanto

minore è la sua ampiezza. Si ha infatti:

$$x = \frac{m^2 k^2 \Omega^{2m-2}}{m(m-1)k\Omega^{m-2}d\Omega/d\tau} = \frac{m}{m-1} \frac{\Omega^m}{d\Omega/d\tau} k \quad (4.2.16)$$

Posto

$$\Omega = \Omega_o + \Omega_1 \sin(\omega\tau) \quad \left(\tau < \frac{\pi}{2\omega} \right) \quad (\Omega_1 \ll \Omega_o) \quad (4.2.17)$$

linearizzando si ottiene:

$$x = \frac{m}{m-1} \frac{U_o \Omega_o}{\omega \Omega_1 \cos \omega\tau} \quad (4.2.18)$$

donde

$$x_{\min} = \frac{m}{m-1} \frac{U_o \Omega_o}{\omega \Omega_1} \quad (4.2.19)$$

Dunque $x_{\min} \rightarrow \infty$ per $\Omega_1/\Omega_o \rightarrow 0$ o per $\omega \rightarrow \infty$.

b L'approssimazione parabolica: attenuazione dell'onda

Un modo ancora relativamente semplice di trattare le equazioni dinamiche è quello di trascurare i termini inerziali nella (4.1.2), mantenendo però il termine nella pendenza della superficie libera. Tale approssimazione corrisponde a supporre che il numero di Froude istantaneo presenti un'ordine di grandezza sensibilmente minore di 1. Ciò emerge da un confronto fra gli ordini di grandezza di $U(\partial U/\partial x)$ e $g(\partial Y/\partial x)$: detta L la lunghezza d'onda, Y_o un valore tipico della profondità e U_o un valore tipico della velocità segue infatti

$$U \frac{\partial U}{\partial x} \ll g \frac{\partial Y}{\partial x} \Rightarrow \frac{U_o^2}{g Y_o} \ll 1 \quad (4.2.20)$$

Si noti che paragonando gli ordini di grandezza della derivata locale $\partial U/\partial t$ e del termine nella pendenza della superficie libera si ottiene che il primo è trascurabile rispetto al secondo ancora se vige la (4.2.20).

Imponendo inoltre che i termini inerziali risultino trascurabili rispetto a quelli di resistenza si trova

$$\frac{U_o^2}{L} \ll \frac{U_o^2}{C^2 Y_o} \Rightarrow \frac{L}{C^2 Y_o} \gg 1 \quad (4.2.21)$$

o, approssimando la velocità di propagazione con U_o ,

$$\frac{gT}{U_o C^2} \gg \frac{1}{F_o^2} \quad (4.2.22)$$

Posto, ad esempio, $U_o \simeq 1$ m/s, $C \simeq 19$ e $F_o \simeq .1$ segue $T \gg 1h$.

L'equazione dinamica si riduce dunque alla relazione

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = i_f - j \quad (4.2.23)$$

Ma, utilizzando l'equazione del moto uniforme per la valutazione della quantità ($\Omega^2 C^2 g R_i$) segue:

$$j = \frac{Q^2}{\Omega^2 C^2 g R_i} = \frac{i_f Q^2}{k^2 \Omega^{2m}} \quad (4.2.24)$$

Derivando rispetto al tempo la (4.2.23) e utilizzando la (4.2.24), si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right) = -\frac{2Q i_f}{k^2 \Omega^{2m}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{2i_f Q^2 m}{k^2 \Omega^{2m+1}} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (4.2.25)$$

avendo ipotizzato k indipendente da x e t . Essendo inoltre

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \quad (4.2.26)$$

e trascurando eventuali variazioni di b con x , segue

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{b} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial t} \quad (4.2.27)$$

Infine, utilizzando l'equazione di continuità, la (4.2.25) diventa

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + c \frac{\partial Q}{\partial x} = D \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (4.2.28)$$

con

$$c = m \frac{Q}{\Omega} \quad (4.2.29)$$

e

$$D = \frac{k^2 \Omega^{2m}}{2Q i_f b} \simeq \frac{Q}{2bj} \quad (4.2.30)$$

La (4.2.28) è un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali di tipo parabolico agevolmente integrabile per via numerica.

Tale modello è in grado di rappresentare l'influenza di eventuali affluenti e, in generale, di condizioni al contorno di valle. Le condizioni al contorno che devono essere associate alla (4.2.28) sono infatti due, usualmente un assegnato idrogramma $Q(0, t)$ nella sezione di monte ($x = 0$) e una relazione $Q = Q(Y)$ nella sezione di valle ($x = L$). Inoltre deve essere nota una condizione iniziale del tipo $Q(x, 0) = q(x)$.

Si noti che a una forma del tipo (4.2.28) si perviene anche scrivendo la (4.2.23) nella forma

$$Q = \Omega C \sqrt{g R_i (i_f - Y_{,x})} \quad (4.2.31)$$

donde

$$Q_{,x} = - \frac{1}{2} \Omega C \sqrt{\frac{g R_i}{(i_f - Y_{,x})}} Y_{,xx} + Y_{,x} \left\{ \left(\frac{dC}{dY} \Omega + C \frac{d\Omega}{dY} \right) \sqrt{g R_i (i_f - Y_{,x})} + \frac{C \Omega}{2} \frac{dR_i}{dY} \sqrt{\frac{g (i_f - Y_{,x})}{R_i}} \right\} \quad (4.2.32)$$

Sostituendo le (4.2.26) e (4.2.32) nell'equazione di continuità si ottiene la seguente forma alternativa del modello parabolico:

$$Y_{,t} + c' Y_{,x} = D' Y_{,xx} \quad (4.2.33)$$

dove

$$c' = \frac{Q}{b} \left(\frac{1}{C} \frac{dC}{dY} + \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dY} + \frac{1}{2R_i} \frac{dR_i}{dY} \right) \quad D' = \frac{Q}{2bj} \quad (4.2.34a, b)$$

La (4.2.32) fornisce una versione più accurata della (4.2.28) (Schonfeld, 1948)¹. Si noti che dalla (4.2.32) si può passare a un'analogia equazione per Q .

Qualche osservazione sulla (4.2.32) può essere di utilità.

- i. Anzitutto interpretata c' come celerità dell'onda di piena, la (4.2.32) descrive onde che, oltre a subire il processo di progressivo irripidimento caratteristico delle onde cinematiche, subiscono anche un'attenuazione. Per un osservatore solidale con l'onda la derivata totale di Y vale ($D'Y_{,xx}$): essendo D' una quantità positiva e $Y_{,xx}$ negativa in prossimità della cresta dell'onda segue che (dY/dt) è negativo, cioè l'onda va attenuandosi. La cosa si dimostra agevolmente anche a partire dalla (4.2.28). Infatti, in prossimità del colmo si ha che $Q_{,x}$ è decrescente

¹Schonfeld J.C. (1948). De Ingenieur, 60, 4, B1-B7.

(Q_x è positiva a monte dove Ω_t risulta negativa e negativa a valle del colmo dove Ω_t risulta positiva).

La cosa appare poi del tutto chiara se si osserva che soluzioni elementari della (4.2.32) con c' e D' costanti (ipotesi non realistica ma qui adottata solo per convenienza esplicativa) sono del tipo

$$Y = Y_0 \exp[-k^2 D't] \sin[k(x - c't)] \quad (4.2.35)$$

- ii. La *celerità di propagazione* c' può agevolmente essere stimata attraverso la (4.2.33a). Se si pone C costante e la sezione rettangolare molto larga segue

$$c' = \frac{3}{2}U \quad (4.2.36)$$

Utilizzando per C la relazione di Strickler, sempre nel caso della sezione rettangolare molto larga, si ha una correzione dovuta a C del tipo

$$c' = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)U \quad (4.2.37)$$

Ancora per una sezione triangolare, con C costante, si ha

$$c' = \frac{5}{4}U \quad (4.2.38)$$

Si osservi come le (4.2.35-37) forniscono valori di c' assai minori delle celerità c_{\pm} associate alle caratteristiche del fenomeno di propagazione (vedi la 4.1.5). Ciò presenta conseguenze fisiche immediate: l'influenza dei disturbi di qualsiasi natura si riflette istantaneamente sull'intero corso d'acqua. In realtà la propagazione delle informazioni avviene con celerità espresse dalla (4.1.5), quindi finite ma molto maggiori di c' : l'approssimazione parabolica equivale ad assumere $c_{\pm} \rightarrow \infty$. Si noti infatti che tale approssimazione è fondata sull'ipotesi $F \ll 1$ donde

$$\left|U \pm \sqrt{gY}\right| = \left|U \left(1 \pm \frac{1}{F}\right)\right| \gg U$$

In altre parole da ogni punto dell'onda di piena vengono emesse informazioni che si propagano con celerità c_{\pm} attenuandosi però rapidamente dato il prevalere degli effetti d'attrito: il risultato è l'evoluzione di un'onda lenta, quasi in equilibrio.

c L'approssimazione parabolica : linearizzazione

È di qualche interesse esaminare soluzioni della (4.2.32) in forma *linearizzata*, tale cioè che c' e D' vengono assunti costanti. Tale approssimazione induce significativi elementi di incertezza nella scelta della condizione di riferimento per la valutazione di c' e D' . Schonfeld (1948) introdusse tale approssimazione assumendo c e D coincidenti con i valori relativi al moto indisturbato. Si noti che tale scelta non è ininfluente poiché c' risulta proporzionale a U : dunque per una sezione rettangolare infinitamente larga, e usando la formula di Strickler, c' è proporzionale a $Y^{2/3}$. Analogamente il coefficiente di attenuazione D' risulta in tal caso proporzionale a $Y^{5/3}$. Ne consegue che nel caso di onde di piena di grande ampiezza l'approssimazione lineare risulta fortemente insufficiente.

Ciò malgrado, in situazioni in cui valutazioni di massima risultano comunque significative, la linearizzazione della (4.2.32) ha il vantaggio di consentire un'integrazione analitica. Posto dunque $c' \simeq c'_o$ e $D' \simeq D'_o$, le soluzioni della (4.2.32) possono ottenersi per sovrapposizione di soluzioni elementari attraverso tecniche matematiche quale la trasformata di Laplace (vedi Carslaw e Jaeger, 1963)².

La soluzione generale relativa al caso linearizzato può essere costruita a partire da una semplice soluzione particolare della

$$Y_{,t} + c'_o Y_{,x} = D'_o Y_{,xx} \quad (4.2.39)$$

Sia $x = 0$ la sezione iniziale di un corso d'acqua e $Y_o(x)$ la distribuzione iniziale delle profondità; l'immissione istantanea di un volume V nella sezione iniziale dà luogo a un'onda elementare del tipo

$$Y = Y_o + \frac{V}{b} Y_1(x, t) \quad (4.2.40)$$

con³ La soluzione (4.2.40) ha le seguenti caratteristiche

$$Y_1 \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 0 \quad x \neq c'_o t \quad y_1 \rightarrow \infty \quad t \rightarrow 0 \quad x = c'_o t \quad (4.2.41 a, b)$$

²Carslaw H.S. e Jaeger J.C. (1963), Operational methods in applied mathematics, Dover Publ., New York.

³Che le (4.2.39, 40) soddisfino alla (4.2.28) si dimostra facilmente effettuando la trasformazione di variabili

$$\xi = x c'_o t$$

e assumendo una soluzione del tipo

$$Y = Y_o + \frac{V}{b} Y_1(\xi, t)$$

Le (4.2.41a,b) mostrano che per $t \rightarrow 0$ la soluzione ha le caratteristiche di una funzione di Dirac. Inoltre è facile mostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y_1(x,t) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \operatorname{erf}(\infty) = 1 \quad (4.2.42)$$

Le (4.2.39) e (4.2.42) implicano che V è proprio il volume di fluido immerso in $x = 0$ all'istante $t = 0$. Utilizzando l'equazione di continuità e la (4.2.38) si ha:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b \frac{\partial Y}{\partial t} = b(c'_o Y_{1,x} - D'_o Y_{1,xx}) \quad (4.2.43)$$

Integrando in x e utilizzando le relazioni (4.2.39) e (4.2.40) si ottiene

$$\begin{aligned} Q &= Q_o + (bc'_o Y_1 - bD'_o Y_{1,x}) \frac{V}{b} = \\ &= Q_o + \frac{V}{2\sqrt{\pi D'_o t}} \left[c'_o + \frac{D'_o(x - c'_o t)}{2D'_o t} \right] \exp \left[-\frac{(x - c'_o t)^2}{4D'_o t} \right] \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

cioè

$$Q = Q_o + V Q_1(x, t) \quad (4.2.45a)$$

con

$$Q_1(x, t) = \frac{x + c'_o t}{4\sqrt{\pi D'_o t^3}} \exp \left[-\frac{(x - c'_o t)^2}{4D'_o t} \right] \quad (4.2.45b)$$

La (4.2.45) descrive un'onda elementare, la cui cresta viaggia con celerità c'_o , che si attenua con rapidità $4(\pi D'_o t)^{-1/2}$. Nel piano (Y, x) essa rappresenta un'onda simmetrica il cui fronte non manifesta l'attitudine a irripidirsi tipica dell'onda cinematica e del caso non lineare. Nel piano (Y, t) l'onda si presenta in forma asimmetrica: ciò dipende dal suo processo di attenuazione che fa sì che, al crescere del tempo, essa vada occupando un'area via via crescente sicché la coda dell'onda decade più lentamente di quanto il fronte sia cresciuto (vedi figura 4.5).

Essendo

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial Y_1}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial Y_1}{\partial t} - c'_o \frac{\partial Y_1}{\partial \xi}$$

La (4.2.38) diventa

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} = D'_o \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \xi^2}$$

che ammette soluzioni del tipo

$$\frac{k_1}{\sqrt{t}} \exp(-\xi^2/k_2 t)$$

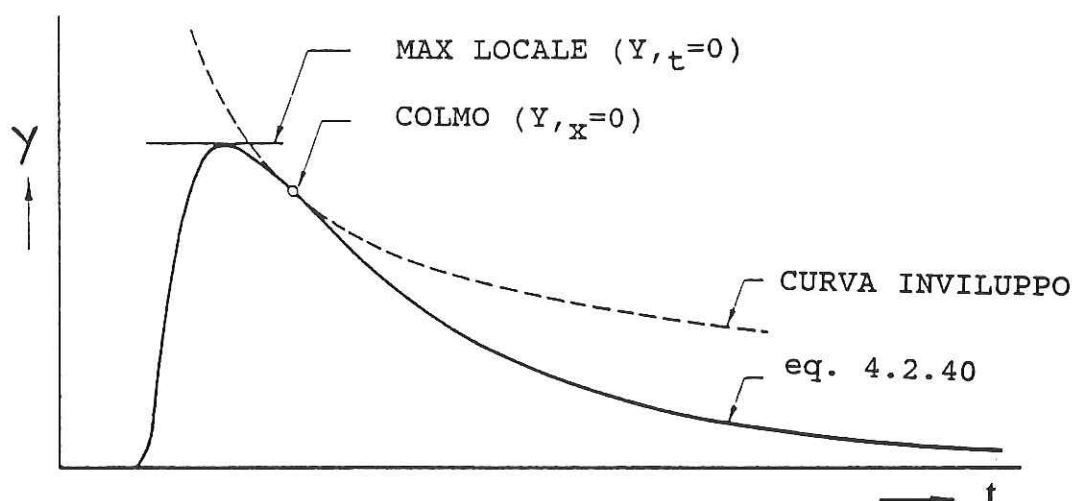


Figura 4.5: Esempio di onda di piena elementare.

La (4.2.45) rappresenta la *risposta istantanea unitaria* detta *idrogramma unitario* (IUH) in Idrologia. La risposta, cioè la portata nella generica sezione x all'istante generico t conseguente all'immissione di una portata arbitraria $f(t)$ nella sezione iniziale, si ottiene attraverso l'integrale di convoluzione seguente:

$$Q(x, t) = Q_0 + \int_0^t f(\tau) Q_1(x, t - \tau) d\tau \quad (4.2.46)$$

In figura 4.6 è riportato un confronto fra la soluzione linearizzata (4.2.40) e la soluzione delle equazioni non lineari complete ottenuta numericamente per una sezione rettangolare. Si noti che la soluzione non lineare si propaga più rapidamente della soluzione completa.

d Il metodo delle caratteristiche per le equazioni complete: effetti inerziali

Nel caso generale in cui siano messi in conto tutti i termini, anche quelli inerziali, delle equazioni del moto il problema differenziale è iperbolico e, come si è visto nel §4.1, esso può essere trasformato in un problema alle derivate totali della forma:

$$\frac{dx}{dt} = U \pm \sqrt{\frac{g\Omega}{b}} \quad (4.2.47 a, b)$$

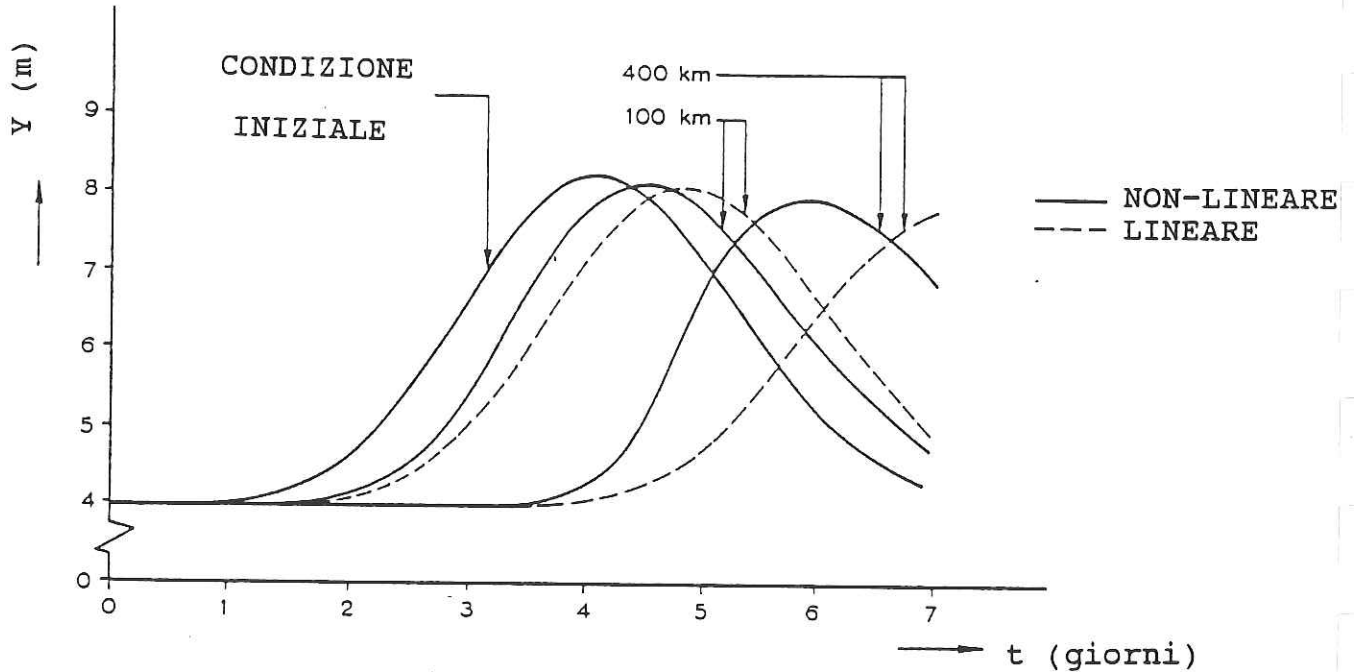


Figura 4.6: Confronto fra soluzione linearizzata del modello parabolico e soluzione non lineare del modello completo. Dati: $b = 300$ m, $i_F = 2 \cdot 10^{-4}$, $Y_o = 4$ m.

$$\frac{dU}{dt} \pm \sqrt{\frac{gb}{\Omega}} \frac{dY}{dt} = \mp \frac{U}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \Big|_Y \sqrt{\frac{gb}{\Omega}} - g[j - i_f] \quad (4.2.48a, b)$$

Le (4.2.47) definiscono in ogni punto del piano orario due velocità che rappresentano le pendenze locali di due linee dette *caratteristiche*. Per correnti lente (localmente) esse corrispondono l'una a propagazione verso valle, l'altra a propagazione verso monte.

Le (4.2.47, 48) possono essere poste alla base di procedimenti numerici di soluzione come discusso al punto 4.3.d.

Alternativamente procedimenti numerici alle differenze finite possono essere utilizzati per la soluzione diretta del sistema (4.1.1, 2) (vedi punto 4.3 d).

e Qualche confronto: onde di piena e onde inerziali

Grijzen e Vreugdenhil (1976)⁴ hanno proposto un confronto fra onde di piena e onde inerziali fondato su una *linearizzazione* delle equazioni complete.

Poniamo

$$U = U_o + \epsilon U_1(x, t) \quad Y = Y_o + \epsilon Y_1(x, t) \quad j = j_o + \epsilon j_1 = i_F + \epsilon j_1 \quad (4.2.49a, b)$$

nelle (4.1.1, 2) e ricaviamo le equazioni per U_1 e Y_1 . Si trova

$$Y_{1,t} + U_o Y_{1,x} + \left(\frac{\Omega}{b}\right)_o U_{1,x} + \left(\frac{\Omega_{,x}|_y}{b}\right)_o U_1 = 0 \quad (4.2.50)$$

$$U_{1,t} + U_o U_{1,x} + g Y_{1,x} + g j_1 = 0 \quad (4.2.51)$$

Consideriamo il caso di alvei cilindrici ($\Omega_{,x}|_Y = 0$): derivando le (4.2.50, 51a,b) rispetto a t e x rispettivamente si trova

$$Y_{1,tt} + U_o Y_{1,tx} + \left(\frac{\Omega}{b}\right)_o U_{1,tx} = 0 \quad (4.2.52a)$$

$$U_{1,tx} + U_o U_{1,xx} + g Y_{1,xx} + g j_{1,x} = 0 \quad (4.2.52b)$$

Eliminando $U_{1,tx}$ dalle (4.2.52a,b) e valutando $U_{1,xx}$ dalla (4.2.50) derivata rispetto a x , si ottiene

$$Y_{1,tt} + U_o Y_{1,xt} + \left(\frac{\Omega}{b}\right)_o \left\{ -U_o \left[-\left(\frac{b}{\Omega}\right)_o (Y_{1,tx} + U_o Y_{1,xx}) \right] - g Y_{1,xx} - g j_{1,x} \right\} = 0 \quad (4.2.53)$$

Dunque, utilizzando la (4.2.24), si trova

$$Y_{1,t} + c_o Y_{1,x} - D_o Y_{1,xx} + I_1 Y_{1,xt} - I_2 Y_{1,tt} = 0 \quad (4.2.54a)$$

con

$$c_o = m U_o \quad (4.2.54b)$$

$$D_o = \frac{U_o \Omega_o}{2b_o i_f} (1 - F^2) \quad (4.2.54c)$$

$$I_1 = \frac{U_o^2}{g i_f} \quad (4.2.54d)$$

⁴Grijzen J.C. e Vreugdenhil C.B. (1976), Proc. Int. Symp. Unsteady flow in open channels, Newcastle-upon-Tyne.

$$I_2 = \frac{U_o}{2gi_f} \quad (4.2.54e)$$

$$F = \frac{U_o}{\sqrt{g\Omega_o/b_o}} \quad (4.2.54f)$$

$$\Omega_o = \Omega(Y_o) \quad (4.2.54g)$$

$$b_o = b(Y_o) \quad (4.2.54h)$$

La (4.2.54a) ammette come casi particolari il modello parabolico per $I_1 = I_2 = 0$ e il modello cinematico quando è anche $D_o = 0$. Soluzioni particolari della (4.2.54a) sono del tipo

$$Y_1 = y_1 \exp[-x/L + i\omega(x/a - t)] \quad (4.2.55)$$

che rappresentano onde di *frequenza* ω che si propagano con *celerità* a e si attenuano di un fattore e^{-1} su una distanza L . Malgrado la (4.2.54a) rappresenti solo qualitativamente il comportamento di un'onda di piena, un esame dai parametri da cui dipendono la lunghezza L e la celerità a è di qualche interesse. Sostituendo la (4.2.55) nella (4.2.54a) si trova:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\omega I_2}i + \frac{1}{\omega I_2} \frac{c_o}{a} \left(-\frac{a}{\omega L} + i\right) - \left(\frac{D_o}{I_2 c_o^2}\right) \frac{c_o^2}{a^2} \\ & \left(-\frac{a}{\omega L} + i\right)^2 - i \left(\frac{I_1}{I_2 c_o}\right) \frac{c_o}{a} \left(-\frac{a}{\omega L} + i\right) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

Dunque i parametri (a/c_o) e $(L\omega/a)$ dipendono dai parametri (ωI_2) , $(D_o/I_2 c_o^2)$, $(I_1/I_2 c_o)$. Ma, utilizzando le (4.2.54b,h), si ottiene:

$$\frac{D_o}{I_2 c_o^2} = \frac{U_o \Omega_o}{2b_o i_f} (1 - F^2) \frac{2gi_f}{U_o} \frac{1}{m^2 U_o^2} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{F^2} - 1\right) \quad (4.2.57a)$$

$$\frac{I_1}{I_2 c_o} = \frac{U_o^2}{gi_f} \frac{2gi_f}{U_o} \frac{1}{mU_o} = \frac{2}{m} \quad (4.2.57b)$$

$$\omega I_2 = \frac{2\pi}{T} \frac{U_o}{2gi_f} = \pi \frac{U_o}{gi_f T} \quad (4.2.57c)$$

Ne consegue la possibilità di esprimere le quantità (a/c_o) e $(L\omega/a)$ in funzione dei soli parametri $(U_o/gi_f T)$ e F o, alternativamente, in funzione dei parametri E e F , con

$$E = \frac{gi_f T}{FU_o} \quad (4.2.58)$$

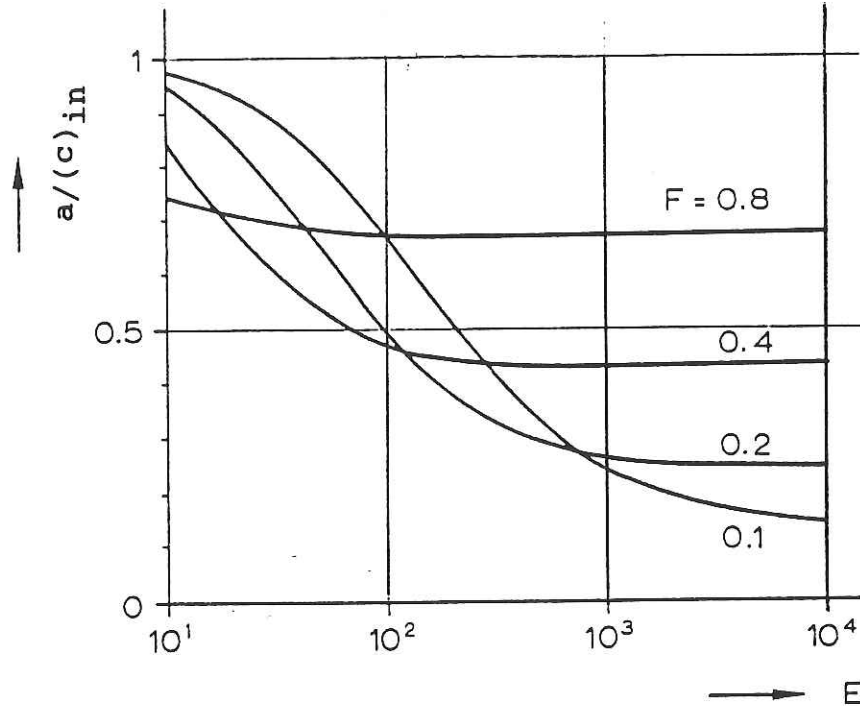


Figura 4.7: Celerità di onde di piccola ampiezza.

La (4.2.56) pone infatti

$$\left(-1 - \frac{EF}{\pi}i\right) + \left(\frac{EF}{\pi}\right) \frac{c_o}{a} \left(-\frac{a}{\omega L} + i\right) - \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{F^2} - 1\right) \left(\frac{c_o}{a}\right)^2$$

$$\left(-\frac{a}{\omega L} + i\right)^2 - \frac{2i c_o}{m a} \left(-\frac{a}{\omega L} + i\right) = 0 \quad (4.2.59)$$

Dalla (4.2.59) si ottengono facilmente espressioni per (c_o/a) e $(\omega L/a)$ in funzione di F ed E (con m assegnata).

La figura 4.7 riporta il rapporto $a/(c)_{in}$ con $(c)_{in} = c_{\pm}$ dato dalla (4.1.18). Si noti che $a \rightarrow (c)_{in}$ per $E \rightarrow 0$ tanto più rapidamente quanto più piccolo è il numero di Froude. Inoltre $a \rightarrow c_o$ per $E \rightarrow \infty$.

Dunque E gioca il ruolo di un parametro che descrive le onde inerziali per valori piccoli e le onde di piena per valori grandi.

La figura 4.8 riporta un ulteriore confronto fra le celerità del modello parabolico e del modello cinematico e quella ottenuta sulla base delle equazioni complete. Tale confronto conferma le conclusioni precedenti.

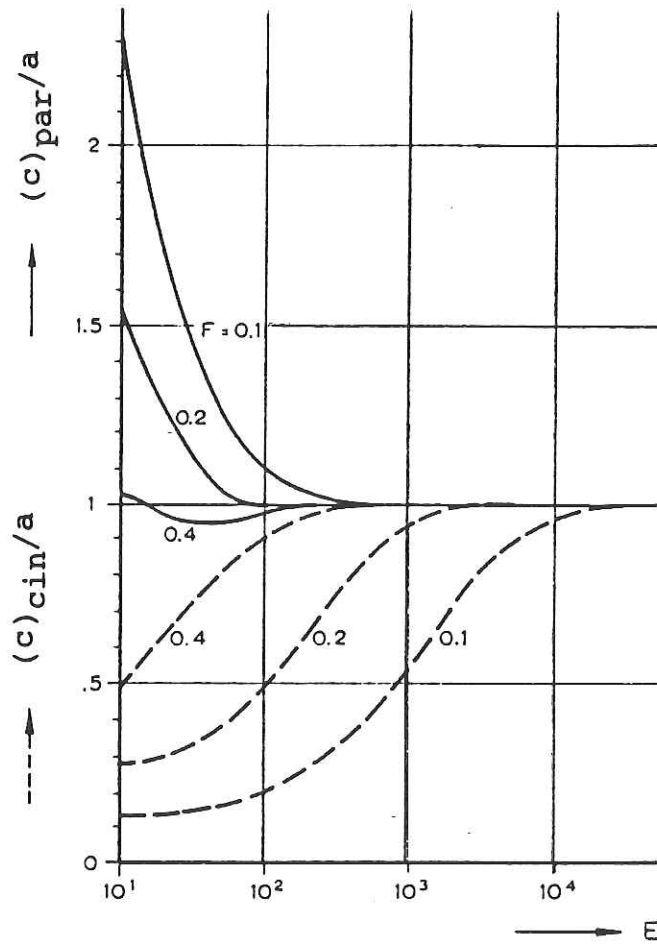


Figura 4.8: Confronto fra le celerità $(c)_{par}$ del modello parabolico, $(c)_{cin}$ del modello cinematico ed a del modello completo.

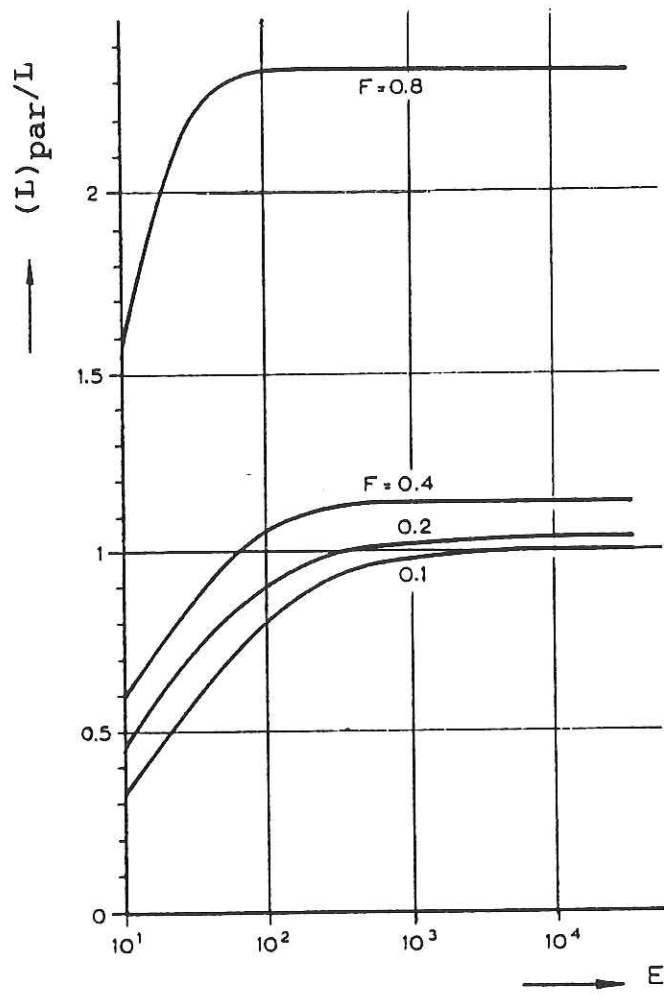


Figura 4.9: Confronto fra le scale spaziali di attenuazione nei modelli parabolico $(L)_{par}$ e completo (L) .

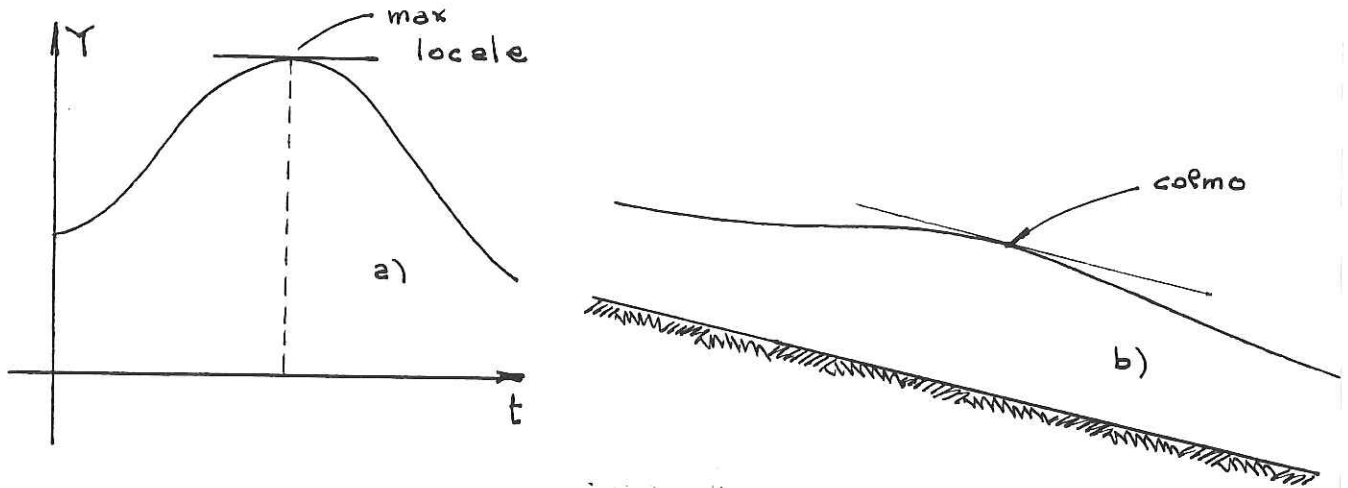


Figura 4.10:

La figura 4.9 riporta infine un confronto fra le scale spaziali di attenuazione nel modello parabolico e in quello completo (si noti che $L \rightarrow \infty$ nel modello cinematico). Anche in questo caso il confronto diventa favorevole per $F \rightarrow 0$ ed $E \rightarrow \infty$. Si noti infatti che

$$\frac{(L_{par})}{L} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{4}F^2\right) (1 - F^2)^{-1} \quad \text{per } E \Rightarrow \infty \quad (4.2.60)$$

donde per F non piccoli l'errore è significativo anche per E grandi.

f Ancora sulle onde di piena: massimi locali e colmi

Di particolare rilievo dal punto di vista ingegneristico è la questione relativa ai valori massimi di profondità, portata e velocità che si verificano in una sezione o nel tronco di corso d'acqua considerato.

Definiamo (vedi figure 4.10 e 4.11)

- *massimo locale*: valore di profondità (portata, velocità) caratterizzato da valore nullo della derivata locale $\partial Y/\partial t$ ($\partial Q/\partial t$, $\partial U/\partial t$) in una sezione fissata;
- *colmo di piena*: valore di profondità (portata, velocità) caratterizzato da valore nullo della derivata spaziale $\partial Y/\partial x$ ($\partial Q/\partial x$, $\partial U/\partial x$) a un istante fissato.

In generale:

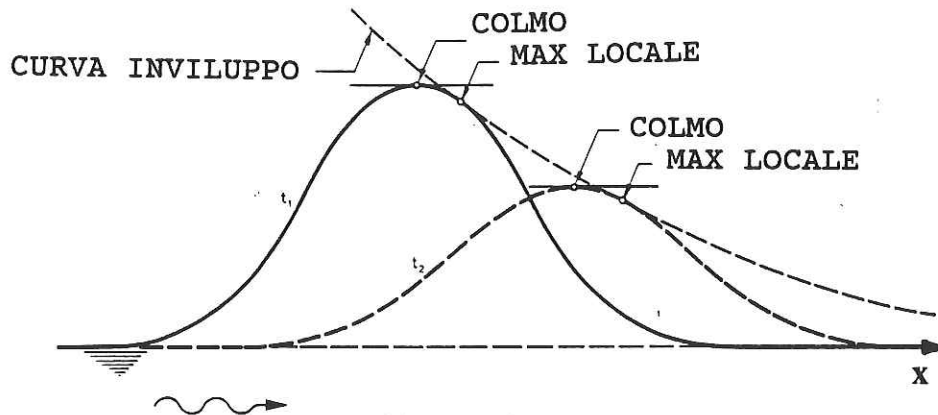


Figura 4.11:

- i) i massimi (o i colmi) relativi alla profondità non coincidono con i massimi (o colmi) relativi a portata o velocità;
- ii) il massimo locale per la profondità coincide, per l'equazione di continuità, con il colmo della portata.

Si noti che una stima approssimata dell'attenuazione dell'onda di piena può essere effettuata, nell'ambito del modello parabolico, a partire dalla conoscenza dell'idrogramma di piena in una data sezione. Si ha infatti (Forcheimer, 1930)⁵:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{Q}{2b_i f} \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \quad (4.2.61)$$

La (4.2.61) pone l'esigenza di stimare $Y_{,xx}$. Ciò è possibile in modo approssimato utilizzando l'equazione dell'onda cinematica (con c costante)

$$(Y_{,x})_{,x} = \left(-\frac{1}{c} Y_{,t} \right)_{,x} = -\frac{1}{c} Y_{,tx} = \frac{Y_{,tt}}{c^2} \quad (4.2.62)$$

donde

$$\frac{dY}{dt} = \frac{Q}{2b_i f c^2} Y_{,tt} \quad (4.2.63)$$

⁵Forcheimer P. (1930), *Hydraulik*, Teubner Verlag.

La (4.2.63), pur con i limiti legati alle approssimazioni su cui è fondata, consente una stima grossolana dell'attenuazione dell'onda utilizzando per la valutazione di c la scala di deflusso relativa al caso uniforme.

g Scala di deflusso di una piena

Il carattere non stazionario del moto influisce sensibilmente sulla relazione fra profondità e portata che non è più univoca bensì assume andamenti diversi nei rami ascendente e discendente della piena.

Una stima di tale effetto può essere operata come segue. Nell'approssimazione parabolica può porsi:

$$Q = Q_u \sqrt{1 - \frac{Y_{,x}}{i_f}} \quad Q_u = \Omega C \sqrt{g R i_f} \quad (4.2.64a, b)$$

La (4.2.64) suggerisce che Q differisce da Q_u in misura più pronunciata per alvei meno pendenti, a parità di $Y_{,x}$. Il valore di $Y_{,x}$ non è facilmente stimabile se non facendo ancora ricorso al modello dell'onda cinematica. Questa suggerisce

$$Y_{,x} = -\frac{1}{c} Y_{,t} \quad (4.2.65)$$

con $c \equiv (dQ/d\Omega)$ celerità stimabile utilizzando la scala di deflusso del moto uniforme. Segue, quindi, in prima approssimazione:

$$Q = Q_u \sqrt{1 + \frac{1}{c i_f} Y_{,t}} \quad (4.2.66)$$

La (4.2.66), nota come *formula di Jones*, non può risultare significativa in prossimità dei massimi in cui la relazione di proporzionalità (4.2.65) non può sussistere. Lontano dai massimi, la (4.2.66) sviluppata in serie di Taylor fornisce:

$$(Q - Q_u) \sim \frac{Q_u}{2c i_f} Y_{,t} + 0(Y_{,t})^2 \quad (4.2.67)$$

Dunque la differenza $(Q - Q_u)$ risulta positiva nella fase ascendente della piena e negativa nella fase discendente; in altre parole si ha un ciclo di isteresi descritto nel verso antiorario. (vedi figura 4.12).

I diversi massimi sono riconoscibili in figura 4.12:

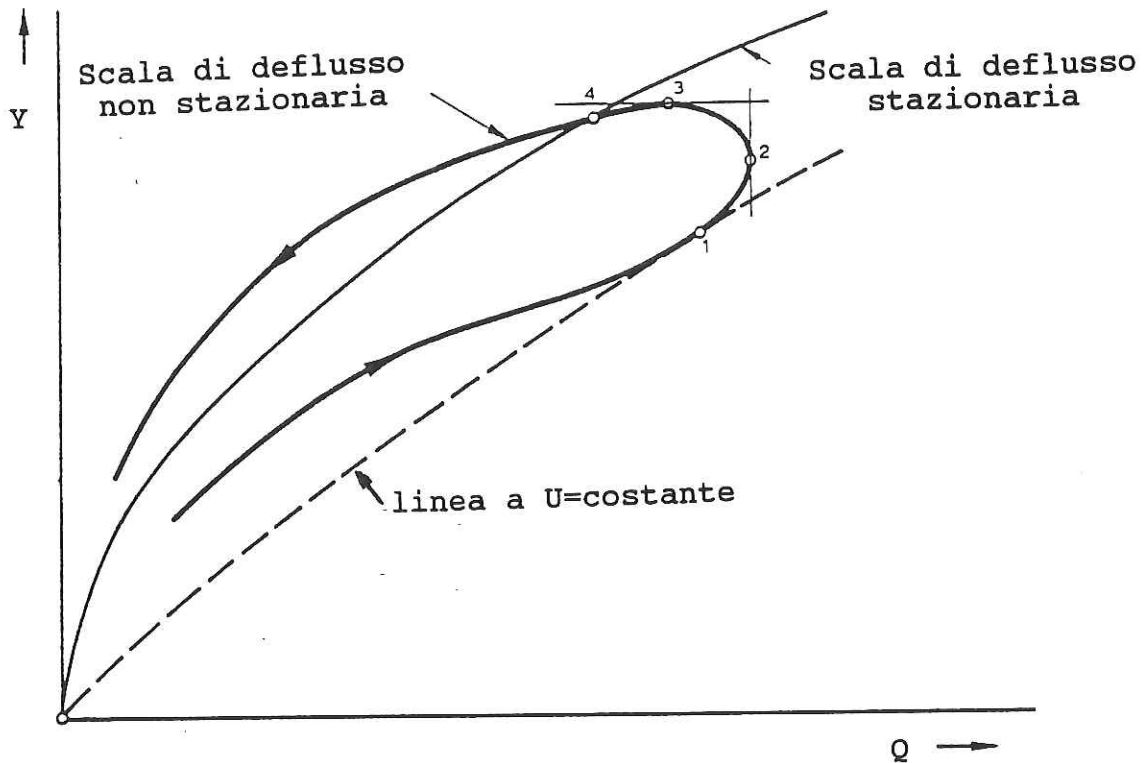


Figura 4.12: Scala di deflusso di una piena.

1. *Massimo locale di velocità* ($U_{,t} = 0$): si costruisce graficamente cercando la linea a velocità costante che risulta tangente alla curva che rappresenta la scala di deflusso della piena; tali linee hanno equazione $Q/\Omega(Y) = \text{costante}$ (in particolare sono rette uscenti dall'origine nel caso di alvei a sezione rettangolare); in un intorno del punto 1 la velocità media della corrente è caratterizzata da derivata locale nulla.
2. *Massimo locale di portata* ($Q, t = 0$).
3. *Massimo locale di profondità* ($Y_{,t} = 0$) coincidente con il *colmo della portata* ($Q_{,x} = 0$)
4. *Colmo della profondità* ($Y_{,x} = 0$): si realizza, per la (4.2.64), quando $Q = Q_u$, cioè all'intersezione della scala di deflusso della piena con la scala di deflusso del moto uniforme.

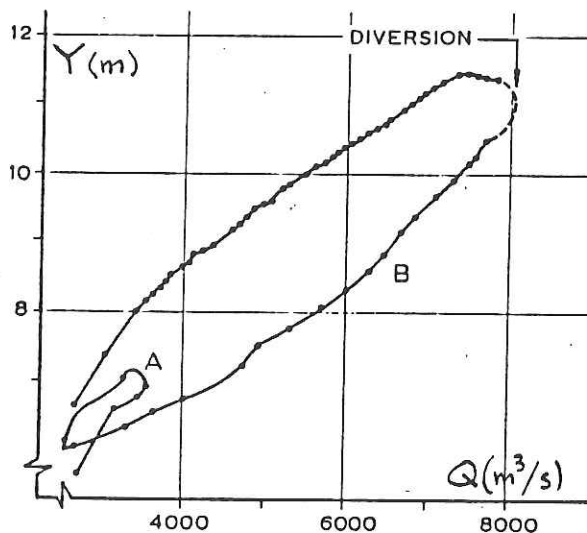


Figura 4.13: Un esempio di scala di deflusso di una piena rilevata sul fiume Connecticut (da Abbott, 1956).

Un esempio di scala di deflusso misurata sul fiume Connecticut e riportata da Abbott (1956)⁶ è rappresentata in figura 4.13. Si noti che una modesta piena (A) si verifica nella fase precedente la piena principale. Inoltre in corrispondenza del picco della piena (B) parte della portata fu scolmata in bacini di diversione adiacenti a quello principale.

Esempio

Si consideri un alveo a sezione rettangolare molto larga con pendenza $i_f = 10^{-4}$. Sia $U = 1$ m/s la velocità media. Segue $(2i_f c)^{-1} \sim 3000$ (m/s)⁻¹.

Dunque se $Y_t \sim 1$ m/h segue $(Q - Q_u/Q_u) \sim 100\%$, cioè la portata può arrivare al doppio di quella della scala di deflusso uniforme. Se la crescita è più lenta, minore è la discrepanza fra le due scale di deflusso.

⁶Abbott R.W. (1956), American Civil Engineering II, Wiley, New York.

4.3 Metodi numerici per la modellazione unidimensionale delle onde di piena

a Introduzione

In generale lo studio delle onde di piena nell'ambito di uno schema monodimensionale richiede la soluzione numerica di un sistema di due equazioni differenziali alle derivate parziali, di tipo *iperbolico*, che coinvolgono due variabili indipendenti (x, t) e una coppia di variabili dipendenti, scelte normalmente l'una fra le grandezze cinematiche (U oppure Q), l'altra fra le grandezze geometriche (Y oppure h). In termini di Q e h si ha

$$bh_{,t} + Q_{,x} = 0 \quad (4.3.1a)$$

$$Q_{,t} + \frac{2\beta Q}{\Omega} Q_{,x} + g\Omega \left(1 - \frac{\beta Q^2 b}{g\Omega^3}\right) h_{,x} - \frac{\beta Q^2}{\Omega^2} \Omega_{,x}|_h + g\Omega j = 0 \quad (4.3.1b)$$

o, in termini di Q e Y ,

$$bY_{,t} + Q_{,x} = 0 \quad (4.3.2a)$$

$$Q_{,t} + \frac{2\beta Q}{\Omega} Q_{,x} + g\Omega \left(1 - \frac{\beta Q^2 b}{g\Omega^3}\right) Y_{,x} - \frac{\beta Q^2}{\Omega^2} \Omega_{,x}|_Y + g\Omega(j - i_F) = 0 \quad (4.3.2b)$$

o, infine, in termini di U e Y ,

$$Y_{,t} + UY_{,x} + \frac{\Omega}{b} U_{,x} + \frac{U}{b} \Omega_{,x}|_Y = 0 \quad (4.3.3a)$$

$$U_{,t} + \frac{(1-\beta)Ub}{\Omega} Y_{,t} + \beta U U_{,x} + gY_{,x} + g(j - i_f) = 0 \quad (4.3.3b)$$

dove si è assunta la quasi-cilindricità del moto, si sono trascurati gli eventuali contributi di afflussi o deflussi laterali di portata, e il termine dissipativo $j = [\tau_o^f B / (\rho g \Omega)]$, nell'ipotesi di gradualità di variazione della corrente nello spazio e nel tempo, è valutato attraverso un'espressione analoga a quella adottata nel caso stazionario. Si noti infine che il coefficiente correttivo della quantità di moto β è stato ritenuto, per semplicità, indipendente dalla coordinata x .

La soluzione numerica dei precedenti sistemi richiede si sostituiscano alle equazioni differenziali equazioni algebriche alle *differenze finite* ottenute attraverso l'introduzione di operatori algebrici in luogo degli operatori differenziali.

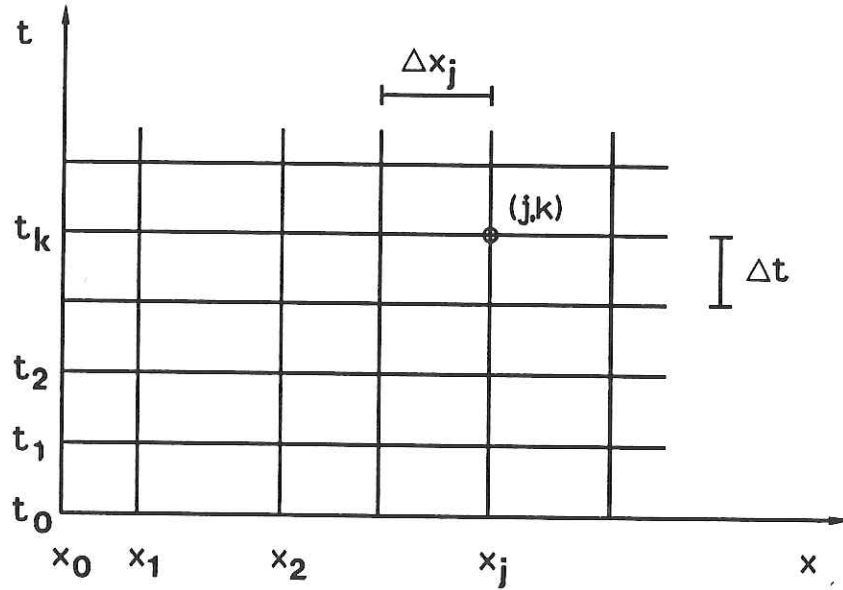


Figura 4.14: Schema del reticolo di calcolo per la soluzione numerica alle differenze finite.

Qualunque sia lo schema di approssimazione prescelto (modello cinematico, modello parabolico, equazioni dinamiche complete) *la soluzione numerica è ottenuta generalmente per avanzamento nel tempo*, a intervalli di tempo finiti Δt , a partire da una soluzione nota in tutto il dominio x di integrazione all'istante iniziale e attraverso la progressiva introduzione delle condizioni al contorno.

La sostituzione dei termini differenziali con opportuni operatori differenza avviene con riferimento ai nodi di un reticolo definito, nel piano orario (x, t) , dalle relazioni

$$x_j = x_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \Delta x_i \quad t_k = t_0 + k\Delta t \quad (j, k) = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.4a, b)$$

Le (4.3.4) definiscono una maglia rettangolare (vedi figura 4.14) costruita con le rette $t = t_k$ equispaziate (cioè il passo temporale Δt è scelto costante così come si verifica nella maggior parte degli schemi numerici) e con le rette $x = x_j$ non necessariamente equispaziate, situazione assai frequente nel caso di alvei naturali. Il punto (x_0, t_0) è un'origine scelta per il reticolo. Si noti che in alcuni casi può risultare più conveniente l'utilizzo di reticoli a maglie non rettangolari.

Per semplificare la trattazione assumeremo nel seguito la costanza del passo spaziale Δx (ciò senza perdere di generalità, potendosi sempre considerare quale valore rappresentativo del passo spaziale il massimo intervallo Δx_i). La (4.3.4a) si scrive in tal caso

$$x_j = x_o + j\Delta x \quad (4.3.5)$$

Naturalmente la scelta della equazione alle differenze non è unica. Sia $f(x, t)$ la funzione che rappresenta la soluzione esatta del problema. Sia inoltre F_j^k la soluzione numerica approssimata del valore esatto $f(x_j, t_k)$ nel nodo (x_j, t_k) . La generica derivata parziale della funzione f nel nodo, per esempio la $f_{,x}$, può essere approssimata da uno dei tre seguenti *quozienti alle differenze*:

$$(f_{,x})_j^k = \frac{\Delta F_j^k}{\Delta x} = \frac{F_{j+1}^k - F_j^k}{\Delta x} \quad (\text{quoz. alle differenze in avanti}) \quad (4.3.6a)$$

$$(f_{,x})_j^k = \frac{\nabla F_j^k}{\Delta x} = \frac{F_j^k - F_{j-1}^k}{\Delta x} \quad (\text{quoz. alle differenze all'indietro}) \quad (4.3.6b)$$

$$(f_{,x})_j^k = \frac{(\delta F_{j+1/2}^k) + (\delta F_{j-1/2}^k)}{2\Delta x} = \frac{F_{j+1}^k - F_{j-1}^k}{2\Delta x} \quad (\text{quoz. alle differenze centrali}) \quad (4.3.6c)$$

Relazioni analoghe si ricavano evidentemente per $f_{,t}$. Si noti che malgrado il quoziente alle differenze centrali rappresenti una migliore approssimazione della derivata il suo uso può talvolta condurre ad amplificazione degli errori nel corso del processo numerico, cioè a instabilità.

Analogamente la derivata parziale seconda può essere sostituita dal quoziente alle differenze

$$(f_{,xx})_j^k = \frac{F_{j+1}^k - 2F_j^k + F_{j-1}^k}{\Delta x^2} \quad (4.3.7)$$

e in modo analogo si può procedere per le derivate di ordine superiore. La scelta di ogni particolare quoziente alle differenze nella discretizzazione definisce lo schema numerico adottato.

Valgono per tali schemi numerici le considerazioni già esposte relative alle cinque proprietà (congruenza, convergenza, stabilità, precisione, efficienza computazionale) che devono essere soddisfatte. Si noti in particolare che la condizione di congruenza si scrive in questo caso nella forma

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} |L_N - L_D| = 0 \quad (4.3.8)$$

essendo L_N e L_D rispettivamente l'operatore numerico e l'operatore differenziale esatto. Inoltre il metodo è detto 'di ordine' $(\Delta x^m, \Delta t^n)$ se l'errore di troncamento tende a zero con tale rapidità. In generale Δx e Δt vanno considerati infinitesimi dello stesso ordine. Analogamente la condizione di convergenza pone

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} |F_j^k - f(x_j, t_k)| = 0 \quad (4.3.9)$$

b Il modello dell'onda cinematica

Consideriamo l'equazione dell'onda cinematica nella forma:

$$Y_{,t} + cY_{,x} = 0 \quad (4.3.10)$$

a. Schemi espliciti

Sia nota la funzione $Y(x)$ all'istante iniziale e definiamo una maglia nel piano (x, t) come descritto al punto (4.3.1) (equazioni 4.3.4b e 4.3.5). Un generale schema *esplicito* per la soluzione numerica della (4.3.10) può porsi nella forma

$$(1 - \alpha) \frac{Y_j^{k+1} - Y_j^k}{\Delta t} + \frac{\alpha (Y_j^{k+1} - Y_{j-1}^k) + (Y_j^{k+1} - Y_{j+1}^k)}{2 \Delta t} + c_j^k \frac{Y_{j+1}^k - Y_{j-1}^k}{2 \Delta x} = 0$$

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.3.11)$$

Nella (4.3.11) la derivata temporale è valutata come media pesata, con coefficiente di peso α , del rapporto incrementale relativo alla sezione $x = x_j$ e dei rapporti incrementali valutati rispetto alla soluzione nota al livello temporale k nei nodi $j + 1$ e $j - 1$. La derivata $Y_{,x}$ è approssimata da un quoziente alle differenze centrali (figura 4.15). c_j^k individua il valore della celerità valutato nel nodo (x_j, t_k) sulla base della soluzione numerica ottenuta, cioè $c_j^k = c(Y_j^k)$. Per $\alpha = 0$ la derivata temporale nella (4.3.11) si riduce al quoziente alle differenze in avanti.

La (4.3.11) è una relazione *esplicita* perché ogni valore di Y al passo temporale $k + 1$ è espresso esplicitamente in funzione dei valori di Y relativi al livello temporale precedente. Si ha infatti

$$Y_j^{k+1} = Y_j^k [1 - \alpha] + Y_{j+1}^k \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} c_j^k \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] + Y_{j-1}^k \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} c_j^k \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] \quad (4.3.12)$$

Esaminiamo per lo schema (4.3.11) le questioni della convergenza e della stabilità al variare di α . Assumiamo per semplicità che la celerità risulti costante, cioè poniamo $c_j^k = c$.

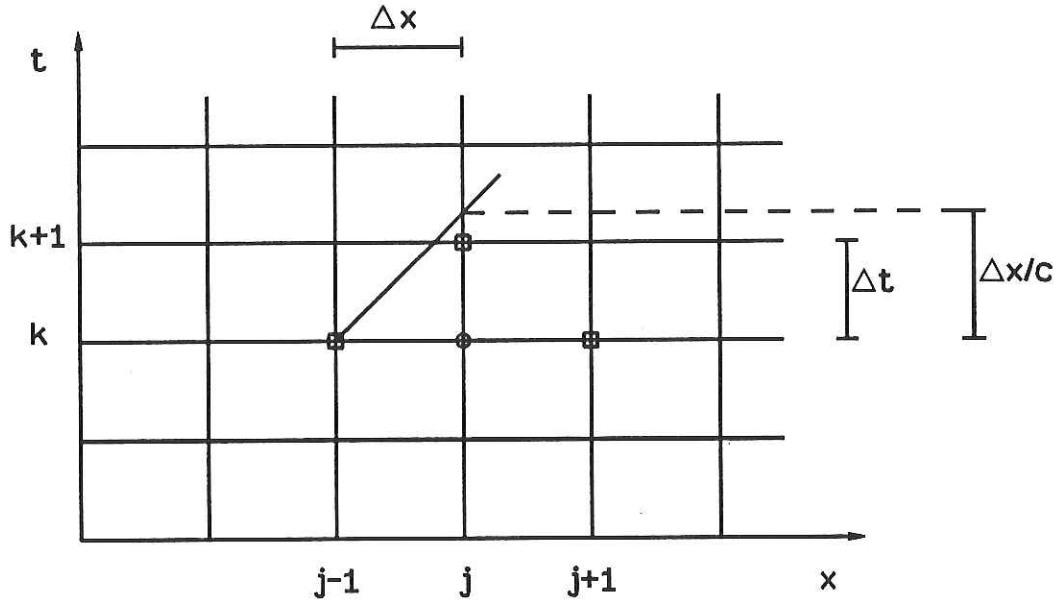


Figura 4.15: Reticolo rettangolare per l'integrazione numerica dell'equazione dell'onda cinematica (schema esplicito).

Al fine di verificare la *congruenza* dello schema è necessario determinare l'errore di troncamento. Sviluppando in serie di Taylor i termini della (4.3.11) rispetto a Y_j^k segue, a meno di termini di ordine superiore,

$$(Y_{,t} + cY_{,x})_j^k = -\frac{\Delta t}{2}(Y_{,tt})_j^k + \frac{\alpha}{2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} (Y_{,xx})_j^k \quad (4.3.13)$$

Utilizzando la (4.3.10) si ha:

$$Y_{,tt} = -(cY_{,x})_{,t} = -c(Y_{,t})_{,x} = c^2 Y_{,xx} \quad (4.3.14)$$

Dunque la (4.3.13) diventa

$$(Y_{,t} + cY_{,x})_j^k = \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{\Delta x^2}{\Delta t} - c^2 \Delta t \right) (Y_{,xx})_j^k \quad (4.3.15)$$

L'errore di troncamento associato allo schema (4.3.11) è dunque di ordine $(\Delta t, \Delta x^2/\Delta t)$. Posto che Δx e Δt siano in rapporto costante tale schema numerico è congruente e del I ordine.

La questione della *stabilità* della soluzione numerica è affrontata osservando che il profilo istantaneo della superficie libera lungo un tronco finito del corso d'acqua può essere rappresentato, purché soddisfatti a opportune condizioni di regolarità, attraverso una serie di Fourier del tipo

$$Y(x, t) = \sum_{n=1}^N A_n(t) \exp[i(n\lambda x)] + c.c. \quad (4.3.16)$$

dove le funzioni ampiezza A_n sono numeri complessi, c.c. individua il complesso coniugato, λ è il numero d'onda dell'armonica fondamentale. Nell'ipotesi di *celerità costante*, il carattere lineare sia dell'equazione differenziale sia dell'equazione algebrica consente di analizzare in quale modo evolva nel tempo l'ampiezza e la fase di ciascuna delle componenti di Fourier espresse dalla (4.3.17) indipendentemente dalle altre (analisi per modi normali). Applichiamo dunque in forma discreta la (4.3.16) alla (4.3.12). A un certo istante $t = k\Delta t$ la soluzione per Y nel nodo $x = x_j$ si scrive:

$$Y_j^k = \sum_{n=1}^N A_n^{(k)} \exp[ni\lambda(j\Delta x)] + c.c. \quad (4.3.17)$$

essendo $x_j = j\Delta x$.

Considerando, per quanto detto sopra, la sola armonica fondamentale $n = 1$, dalla (4.3.12) si ottiene:

$$\begin{aligned} A_1^{(k+1)} \exp[i\lambda(j\Delta x)] &= A_1^{(k)}(1 - \alpha) \exp[i\lambda(j\Delta x)] + \\ + A_1^{(k)} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \exp[i\lambda(j+1)\Delta x] &+ A_1^{(k)} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \exp[i\lambda(j-1)\Delta x] \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

Quindi

$$\begin{aligned} A_1^{(k+1)} &= A_1^{(k)} \left\{ 1 - \alpha + \frac{\alpha}{2} [\exp(i\lambda\Delta x) + \exp(-i\lambda\Delta x)] + \right. \\ &+ \left. \frac{c}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\exp(-i\lambda\Delta x) - \exp(i\lambda\Delta x)] \right\} = \\ &= A_1^{(k)} \left\{ 1 - \alpha + \alpha \cos(\lambda\Delta x) - c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(\lambda\Delta x) \right\} \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

La valutazione del rapporto $A_1^{(k+1)}/A_1^{(k)}$, scritto in notazione complessa nella forma

$$\frac{A_1^{(k+1)}}{A_1^{(k)}} = G = \rho \exp[i\delta] \quad (4.3.20)$$

consente di determinare le caratteristiche di stabilità del metodo numerico utilizzato. Si noti, in particolare, che è il modulo di tale rapporto che controlla l'amplificazione dell'ampiezza di Y nel tempo. La quantità ρ è denominata *coefficiente di amplificazione*. La fase Δ controlla la celerità di propagazione della soluzione numerica. La condizione di stabilità pone quindi

$$|G| \leq 1 \quad (4.3.21)$$

Ricordando la (4.3.10), dalla (4.3.11) segue,

$$\rho^2 = [1 - \alpha + \alpha \cos(\lambda \Delta x)]^2 + \left[c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin(\lambda \Delta x) \right]^2 \quad (4.3.22)$$

Dunque la condizione di stabilità (4.3.21) è soddisfatta se

$$\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \leq \alpha \leq 1 \quad (4.3.23)$$

La condizione necessaria perché la (4.3.23) sia soddisfatta è detta di *Courant-Friedrichs-Lewy* e si scrive

$$|c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.3.24)$$

Tale condizione impone dunque che il passo temporale non ecceda l'intervallo temporale caratteristico inteso come tempo associato alla propagazione lungo il passo spaziale Δx con celerità c (vedi figura 4.15).

Esaminiamo alcuni casi particolari:

- i) $\alpha = 0$: è il caso del quoziente alle differenze 'in avanti', che risulta evidentemente sempre instabile sulla base della (4.3.23);
- ii) $\alpha = 1$: è uno schema frequentemente utilizzato, introdotto da Lax (1954)⁷, la cui stabilità è condizionata dalla (4.3.24);
- iii) $\alpha = c \Delta t / \Delta x$: è detto schema alle differenze 'all'indietro', riferendo quest'ultima locuzione alla discretizzazione della derivata spaziale. La (4.3.12) diventa in tal caso

$$Y_j^{k+1} = Y_j^k - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (Y_j^k - Y_{j-1}^k) \quad (4.3.25)$$

⁷Lax P.D. (1954) Comm. Pure Appl. Math., 7.

Si noti che il corrispondente schema alle differenze (spaziali) 'in avanti' risulta sempre instabile. Tale differente comportamento dello schema (4.3.25) rispetto al suo analogo 'in avanti' non deve stupire: lo schema (4.3.25) implica un'influenza della soluzione nel nodo $j - 1$ sulla soluzione nel nodo j (cioè da monte verso valle). Viceversa lo schema 'in avanti' comporterebbe un trasferimento di informazione da valle verso monte. Tale dipendenza non è evidentemente ammissibile nell'ambito della approssimazione cinematica dove, come è noto, la soluzione può essere controllata soltanto da monte.

La condizione di Courant-Friedrichs-Lewy impone un vincolo molto restrittivo nei problemi di propagazione delle piene poiché Δx è spesso determinato da vincoli geometrici. La condizione impone pertanto una limitazione sul passo temporale utilizzabile nella soluzione numerica che può risultare particolarmente gravosa. Ciò conduce alla necessità di far ricorso a schemi numerici diversi detti *impliciti*: per tali schemi la soluzione al nuovo livello temporale $k + 1$ in ogni nodo è espressa non solo in funzione della soluzione nota ai livelli temporali precedenti, bensì anche della soluzione ancora incognita in altri nodi al tempo $k + 1$.

b. Schemi impliciti

Uno schema numerico implicito abbastanza generale per la soluzione della (4.3.10) può essere ottenuto, con riferimento a sei punti reticolari come illustrato in figura 4.16, approssimando la derivata spaziale con una media pesata (nel tempo) di differenze centrali ai passi temporali k e $k + 1$ e valutando la derivata temporale come media pesata (spaziale) di differenze in avanti nei nodi $j - 1$, j e $j + 1$. Quindi, introdotto un coefficiente di peso temporale θ (con $0 \leq \theta \leq 1$) e un coefficiente di peso spaziale α analogo a quello utilizzato per lo schema esplicito, la (4.3.10) può trasformarsi nella relazione algebrica

$$(1 - \alpha) \frac{Y_j^{k+1} - Y_j^k}{\Delta t} + \frac{\alpha (Y_{j+1}^{k+1} - Y_{j+1}^k) + (Y_{j-1}^{k+1} - Y_{j-1}^k)}{2 \Delta t} + \quad (4.3.26)$$

$$+ \theta \left[c_j^{k+1} \frac{Y_{j+1}^{k+1} - Y_{j-1}^{k+1}}{2 \Delta x} \right] + (1 - \theta) \left[c_j^k \frac{Y_{j+1}^k - Y_{j-1}^k}{2 \Delta x} \right] = 0$$

La (4.3.11) può riguardarsi quale caso particolare della (4.3.26) con $\theta = 0$ e $Y_{j+1}^{k+1} = Y_{j-1}^{k+1} = Y_j^{k+1}$.

Posto che la celerità sia costante, esaminiamo la congruenza e la stabilità dello schema numerico. E' sufficiente prendere in esame il caso semplificato

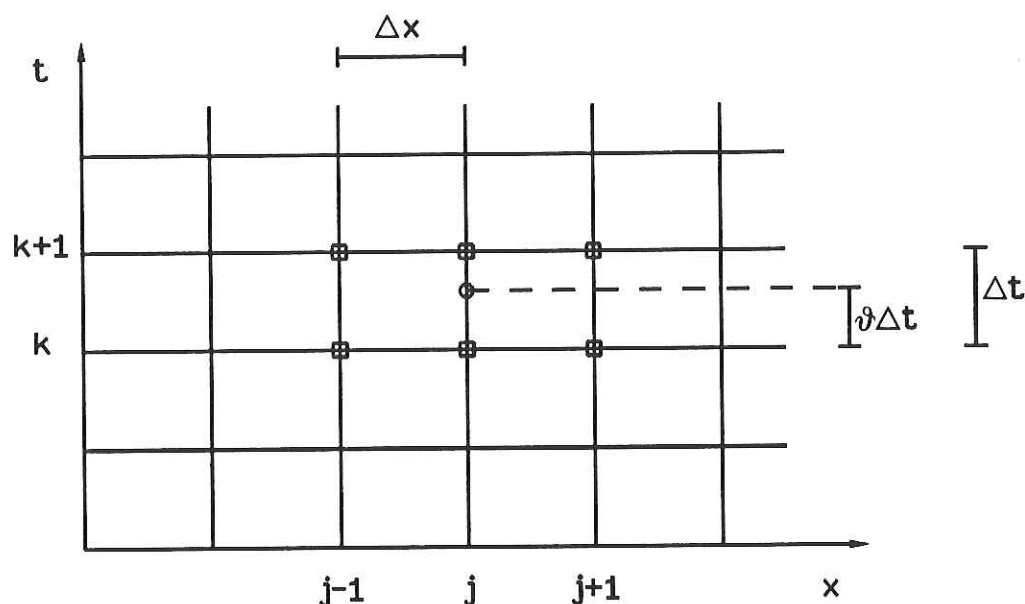


Figura 4.16: Reticolo rettangolare per l'integrazione numerica dell'equazione dell'onda cinematica (schema implicito).

$\alpha = 0$. Sviluppando in serie di Taylor i termini della (4.3.26) in un intorno del punto $(j, k + \theta)$, che è il centro della cella computazionale illustrata in figura 4.7, segue:

$$Y_j^{k+1} = Y_j^{k+\theta} + Y_{,t} \Big|_j^{k+\theta} (1 - \theta)\Delta t + \frac{1}{2} Y_{,tt} \Big|_j^{k+\theta} (1 - \theta)^2 \Delta t^2 + O(\Delta t)^3 \quad (4.3.27)$$

$$Y_j^{k+\theta} = Y_j^k + Y_{,t} \Big|_j^{k+\theta} \theta \Delta t + \frac{1}{2} Y_{,tt} \Big|_j^{k+\theta} \theta^2 (\Delta t)^2 + O(\Delta t)^3 \quad (4.3.28)$$

donde:

$$\frac{Y_j^{k+1} - Y_j^k}{\Delta t} = \left[Y_{,t} + \frac{1}{2} Y_{,tt} (1 - 2\theta) \Delta t \right] \Big|_j^{k+\theta} + O(\Delta t^2) \quad (4.3.29)$$

Analogamente:

$$(Y_{j+1}^{k+1}, Y_{j-1}^{k+1}) = Y_j^{k+1} + (+, -) Y_{,x} \Big|_j^{k+1} \Delta x + \frac{1}{2} Y_{,xx} \Big|_j^{k+1} (\Delta x)^2 + O(\Delta x)^3 \quad (4.3.30)$$

donde

$$\frac{Y_{j+1}^{k+1} - Y_{j-1}^{k+1}}{2\Delta x} = Y_{,x} |_j^{k+1} + O(\Delta x)^2 \quad (4.3.31)$$

e, sviluppando $Y_{,x} |_j^{k+1}$ in un intorno di $(j, k + \theta)$, segue

$$\frac{Y_{j+1}^{k+1} - Y_{j-1}^{k+1}}{2\Delta x} = [Y_{,x} + Y_{,xt}(1 - \theta)\Delta t]_j^{k+\theta} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \quad (4.3.32)$$

Analogamente, si ha:

$$\frac{Y_{j+1}^k - Y_{j-1}^k}{2\Delta x} = [Y_{,x} + Y_{,xt}\theta\Delta t]_j^{k+\theta} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \quad (4.3.33)$$

Quindi la (4.3.26) fornisce, con $\alpha = 0$ e celerità c costante,

$$\left\{ Y_{,t} + Y_{,x} [c\theta + c(1 - \theta)] + \left[\frac{1}{2} Y_{,tt} (1 - 2\theta) \right] \Delta t \right\}_j^{k+\theta} = O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (4.3.34)$$

cioè

$$(Y_{,t} + cY_{,x})_j^{k+\theta} = \frac{1}{2}(2\theta - 1)\Delta t(Y_{,tt})_j^{k+\theta} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (4.3.35)$$

La (4.3.35) mostra che lo schema (4.3.26) è congruente e del I ordine se $\theta \neq 1/2$, congruente e del II ordine se $\theta = 1/2$.

Il vantaggio dei procedimenti impliciti è spesso la loro maggiore *stabilità*. Quest'ultima può essere esaminata secondo il procedimento già illustrato per i metodi espliciti. Si ricava, sempre nell'ipotesi di celerità costante e $\alpha = 0$,

$$A_1^{(k+1)} \left\{ 1 + \theta c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(\lambda \Delta x) \right\} = A_1^{(k)} \left\{ 1 - (1 - \theta) c \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin(\lambda \Delta x) \right\} \quad (4.3.36)$$

Dunque il coefficiente di amplificazione è dato dalla relazione

$$\rho^2 = \frac{1 + c^2(\theta - 1)^2(\Delta t/\Delta x)^2 \sin^2(\lambda \Delta x)}{1 + \theta^2 c^2(\Delta t/\Delta x)^2 \sin^2(\lambda \Delta x)} \quad (4.3.37)$$

La condizione di stabilità (4.3.21) pone, in tal caso,

$$(\theta - 1)^2 \leq \theta^2 \quad \Rightarrow \quad \theta \geq \frac{1}{2} \quad (4.3.38a, b)$$

Quindi, scelto opportunamente il coefficiente di peso temporale, tale cioè da soddisfare la condizione (4.3.38b), il procedimento implicito risulta incondizionatamente stabile per qualsiasi scelta dei valori di Δx e Δt . Ciò

costituisce evidentemente un notevole vantaggio, il cui prezzo tuttavia è l'accresciuta complessità della soluzione numerica. Nel caso implicito infatti non è più possibile ricavare la soluzione in ogni nodo al nuovo livello temporale indipendentemente dalla soluzione relativa agli altri nodi allo stesso passo temporale. la soluzione numerica a ogni passo temporale richiede dunque la soluzione simultanea di un sistema di equazioni algebriche costituito da relazioni del tipo (4.3.26) per ciascun nodo interno e dalla condizione al contorno. Un cenno alla soluzione di tale sistema è riportato nel seguito.

Si noti che il criterio di stabilità ottenuto risulta a rigori valido solo nel caso lineare (cioè celerità costante). Esso fornisce tuttavia un'indicazione importante sul valore ottimale del coefficiente di peso θ da utilizzarsi nel caso più generale. Si noti infine che la scelta del passo temporale Δt non è comunque arbitraria: esistono evidentemente limiti all'aumento di Δt dovuti ai problemi di precisione.

c Il modello numerico parabolico

Prendiamo ora in esame l'equazione che si ricava nell'ambito dell'approssimazione parabolica

$$Y_{,t} + c'Y_{,x} = D'Y_{,xx} \quad (4.3.39)$$

dove

$$c' = \frac{Q}{b} \left(\frac{1}{C} \frac{DC}{dY} + \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{dY} + \frac{1}{2R_i} \frac{dR_i}{dY} \right) \quad (4.3.40a)$$

$$D' = \frac{Q}{2bj} \quad (4.3.40b)$$

Tale modello è, come noto, in grado di rappresentare anche l'influenza della condizione al contorno di valle ($x = x_N$). Inoltre la presenza del termine diffusivo nella derivata seconda consente di descrivere onde di piena che subiscono un'attenuazione oltre al processo di irripidimento tipico dell'onda cinematica. La soluzione del problema posto dalla (4.3.39) richiede pertanto la conoscenza di due condizioni al contorno, per esempio assumendo $Y(x_o, t)$ e $Y(x_N, t)$, e la conoscenza di una condizione iniziale $Y(x, t_o)$, con $x_o \leq x \leq x_N$. Si noti che la portata Q si ricava, a ogni istante, dalla relazione

$$Q = C\Omega \sqrt{gR_i(i_f - Y_{,x})} \quad (4.3.41)$$

La generalizzazione dello *schema implicito* (4.3.26) nel caso dell'equazione (4.3.39) si ricava facilmente nella forma

$$\begin{aligned} & (1 - \alpha) \frac{Y_j^{k+1} - Y_j^k}{\Delta t} + \frac{\alpha (Y_{j+1}^{k+1} - Y_{j+1}^k) + (Y_{j-1}^{k+1} - Y_{j-1}^k)}{2 \frac{\Delta t}{\Delta x}} + \\ & + \theta \left[c_j^{k+1} \frac{Y_{j+1}^{k+1} - Y_{j-1}^{k+1}}{2\Delta x} - D_j^{k+1} \frac{Y_{j+1}^{k+1} - 2Y_j^{k+1} + Y_{j-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \right] + \\ & + (1 - \theta) \left[c_j^k \frac{Y_{j+1}^k - Y_{j-1}^k}{2\Delta x} - D_j^k \frac{Y_{j+1}^k - 2Y_j^k + Y_{j-1}^k}{\Delta x^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.3.42)$$

Lo schema (4.3.42) è esplicito se $\alpha = \theta = 0$, ovvero, con $\alpha \neq 0$ e $\theta = 0$, se la derivata temporale è approssimata con uno schema del tipo (4.3.11) cioè sulla base del solo valore incognito Y_j^{k+1} .

Valgono per lo schema (4.3.42) le considerazioni esposte al punto precedente relative alla modellazione numerica del modello cinematico. In particolare informazioni sulla *congruenza* e sulla *stabilità* dello schema possono ancora ottenersi esaminando il caso lineare (c' e D' costanti).

Sviluppando i termini della (4.3.42) in serie di Taylor in un intorno del punto $(x_j, t_k + \theta \Delta t)$, e posto $\alpha = 0$, si ottiene un risultato del tutto analogo alla (4.3.35), cioè

$$(Y_{,t} + c'Y_{,x} - D, Y, xx)_j^{k+\theta} = \frac{1}{2}(2\theta - 1)\Delta t (Y_{,tt})_j^{k+\theta} + O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta x \Delta t) \quad (4.3.43)$$

La (4.3.43) rivela dunque che lo schema numerico è congruente e del I ordine, salvo nel caso in cui $\theta = 1/2$ in cui diventa del II ordine.

Per quanto concerne la *stabilità*, operando come nel caso del modello dell'onda cinematica, si trova per l'armonica fondamentale

$$\frac{G - 1}{\theta G + 1 - \theta} = a_1 + ia_2 \quad (4.3.44a)$$

$$a_1 = -\nu \frac{1 - \cos(\lambda \Delta x)}{1 - \alpha[1 - \cos(\lambda \Delta x)]} \quad (4.3.44b)$$

$$a_2 = -\mu \frac{\sin(\lambda \Delta x)}{1 - \alpha[1 - \cos(\lambda \Delta x)]} \quad (4.3.44c)$$

dove G è definito come nella (4.3.20), λ è il numero d'onda, e i parametri μ e ν sono dati dalle relazioni

$$\mu = c' \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad \nu = 2D' \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (4.3.45a, b)$$

Nel caso *esplicito*, con $\alpha = \theta = 0$, la (4.3.44a) diventa

$$G = 1 - v[1 - \cos(\lambda\Delta x)] - i\mu \sin(\lambda\Delta x) \quad (4.3.46)$$

Elaborando la (4.3.46) si ricava che la condizione di stabilità $|G| \leq 1$ è soddisfatta se

$$\mu^2 \leq \nu \leq 1 \quad (4.3.47)$$

La (4.3.47) si scrive anche:

$$\Delta t \leq \frac{2D'}{c'^2} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D'} \quad (4.3.48 a, b)$$

La limitazione sul passo temporale imposta dalla condizione di stabilità può risultare molto restrittiva, soprattutto se localmente si verificano piccoli valori di D' e valori elevati di c' , circostanza che impone l'uso di un limitato passo temporale per l'intera soluzione numerica.

Per lo schema *implicito*, riscritta la (4.3.44a) nella forma

$$G = [1 + (1 - \theta)(a_1 + ia_2)][1 - \theta(a_1 + ia_2)]^{-1} \quad (4.3.49)$$

la condizione di stabilità $|G| \leq 1$ pone

$$\frac{[1 + (1 - \theta)a_1]^2 + [1 - \theta]^2 a_2^2}{(1 - \theta a_1)^2 + \theta^2 a_2^2} \quad (4.3.50)$$

cioè

$$a_1 \leq (a_1^2 + a_2^2) \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \quad (4.3.51)$$

Condizione sufficiente, ma non necessaria, per la stabilità è quindi

$$\theta \geq \frac{1}{2} \quad \alpha \leq \frac{1}{2} \quad (4.3.52 a, b)$$

Tali condizioni sono molto meno restrittive delle (4.3.47) e consentono l'adozione di passi temporali assai più elevati, il che compensa il maggior lavoro numerico dovuto al carattere implicito dello schema. Si noti che anche nel caso del modello parabolico, se si adotta uno schema implicito, la condizione di stabilità non comporta alcuna restrizione sul passo temporale ma impone soltanto che il centro dello schema computazionale sia localizzato a un istante di tempo superiore al valor medio dei due livelli temporali k e $k + 1$. Naturalmente l'aumento di Δt è limitato dalla necessità di non perdere in precisione, essendo come visto l'errore di troncamento proporzionale a Δt .

La precisione rispetto alla coordinata spaziale è influenzata dalla scelta del coefficiente di peso α . In tal senso Stone e Brian (1963)⁸ suggeriscono l'adozione del valore $\alpha = 1/3$, che peraltro rispetta la condizione di stabilità (4.3.52b). È possibile dimostrare, in generale, che il valore ottimale di α ai fini della precisione è il seguente:

$$\alpha = \frac{1}{3} + \frac{c'^2}{6} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \quad (4.3.53)$$

Il carattere implicito dello schema (4.3.42) implica la necessità di risolvere, a ogni passo temporale, un sistema di equazioni algebriche in generale non lineari. Si noti che la non linearità deriva dal fatto che i coefficienti c' e D' dipendono dall'incognita Y .

Nel caso *lineare* (c' e D' costanti) il sistema da risolvere risulta *tridiagonale*. Infatti, se $j = 0, 1, 2, \dots, N$, in ciascun nodo interno la (4.3.42) può scriversi nella forma

$$A_j Y_{j-1}^{k+1} + B_j Y_j^{k+1} + C_j Y_{j+1}^{k+1} = E_j \quad (1 \leq j \leq N-1) \quad (4.3.54)$$

dove i coefficienti A_j , B_j , C_j e E_j sono quantità note in funzione della soluzione al livello temporale k . Dunque il sistema da risolvere a ogni passo temporale per le $(N+1)$ incognite Y_j^{k+1} è costituito da $(N-1)$ equazioni del tipo (4.3.54) contenenti ciascuna tre incognite, e da 2 equazioni che esprimono le condizioni al contorno. Il sistema è tridiagonale perché la matrice dei coefficienti ha elementi non nulli soltanto lungo la diagonale principale e le due diagonaline adiacenti.

In tal caso esistono algoritmi di calcolo molto efficienti, quali il metodo *double sweep* introdotto da Richtmyer e Morton (1967) che consiste sostanzialmente in un adattamento del metodo di eliminazione di Gauss. Poiché il sistema è lineare la soluzione può porsi nella forma

$$Y_j = G_j Y_{j+1} + F_j \quad (4.3.55)$$

avendo ommesso, per semplicità, l'indice $k+1$.

Poiché una relazione del tipo (4.3.55) è valida in ogni nodo, segue dalla (4.3.54)

$$A_j [G_{j-1} Y_j + F_{j-1}] + B_j Y_j + C_j Y_{j+1} = E_j \quad (4.3.56)$$

⁸Stone H.L., Brian P.L.T. (1963) A.I.Ch.E.J., 9, 681-689.

dunque

$$Y_j = -\frac{C_j Y_{j+1}}{B_j + A_j G_{j-1}} + \frac{E_j - F_{j-1} A_j}{B_j + A_j G_{j-1}} \quad (4.3.57)$$

Confrontando la (4.3.55) con la (4.3.57) si ottiene una relazione ricorsiva che consente di valutare i coefficienti G_j e F_j al variare dell'indice j , noto il valore nel nodo spaziale precedente:

$$G_j = -\frac{C_j}{B_j + A_j G_{j-1}} \quad F_j = \frac{E_j - F_{j-1} A_j}{B_j + A_j G_{j-1}} \quad (4.3.58 a, b)$$

L'imposizione della condizione di monte fornisce i valori di partenza per l'utilizzo del metodo 'double-sweep'. Nel caso più generale di condizione al contorno mista si ha

$$Y + \gamma_1 Y_{,x} = \gamma_2 \quad (4.3.59)$$

con γ_1 e γ_2 coefficienti costanti o funzioni del tempo assegnate. Applicata al nodo di monte $j = 0$ la (4.3.59) si scrive, in forma discreta,

$$Y_o + \gamma_1 \frac{Y_1 - Y_o}{\Delta x} = \gamma_2 \quad (4.3.60)$$

cioè assume una forma del tipo (4.3.55) con

$$G_o = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \Delta x} \quad F_o = \frac{\gamma_2 \Delta x}{\Delta x - \gamma_1} \quad (4.3.61 a, b)$$

dove le quantità γ_1 e γ_2 , se funzioni del tempo, sono da valutarsi per $t = t_o + (k + 1)\Delta t$, cioè con il valore relativo al livello temporale in esame. Il caso particolare, assai frequente, in cui è assegnato a monte l'idrogramma di piena $Y_o = \gamma_2(t)$ (condizione al contorno del tipo Dirichlet) si traduce quindi nelle relazioni

$$G_o = 0 \quad F_o = \gamma_2[t_o + (k + 1)\Delta t] \quad (4.3.62 a, b)$$

Il metodo 'double-sweep' consiste quindi in una doppia sequenza di operazioni ricorsive:

- la prima, da monte verso valle, consente il calcolo ricorsivo dei coefficienti G_j e F_j (con l'indice j variabile da 1 a $N - 1$) utilizzando le relazioni (4.3.58a,b) e assegnati preventivamente sulla base delle condizioni al contorno di monte i valori G_o e F_o (relazioni (4.3.61a,b));

- la seconda, da valle verso monte, consente la determinazione dei valori incogniti Y_j attraverso la relazione (4.3.55) applicata ricorsivamente all'indietro (cioè con l'indice j variabile da $N - 1$ a 0) sulla base del valore Y_{j+1} ; la seconda sequenza ricorsiva necessita ovviamente della conoscenza del valore iniziale Y_N nella sezione di valle che è fornito dalla condizione al contorno.

Se il problema è *non lineare* (c' e D' variabili) la soluzione con il metodo sopra descritto richiede a ogni livello temporale una sequenza di operazioni del tipo:

- i) linearizzazione della (4.3.42), cioè valutazione esplicita delle quantità c' e D' al livello temporale $k+1$ con la posizione

$$(c')_j^{k+1} = (c')_j^k \quad (D')_j^{k+1} = (D')_j^k \quad (4.3.63 a, b)$$

- ii) soluzione del sistema lineare risultante con il metodo 'double-sweep': determinazione di una soluzione per Y_j^{k+1} di primo tentativo;
- iii) valutazione dei coefficienti c' e D' al livello temporale $k + 1$ sulla base della soluzione di primo tentativo e nuova soluzione del sistema lineare risultante con il metodo 'double-sweep': determinazione di una soluzione per Y_j^{k+1} di secondo tentativo;
- iv) eventuale iterazione: ripetizione del punto (iii);
- v) passaggio al livello temporale successivo.

d Il modello numerico del sistema completo

La soluzione numerica delle equazioni dinamiche complete si ottiene generalmente attraverso il *metodo delle caratteristiche* oppure utilizzando schemi alle *differenze finite*. Nel primo caso il sistema differenziale originario alle derivate parziali (di tipo iperbolico) viene trasformato in un sistema alle derivate ordinarie lungo le curve caratteristiche. In entrambi i casi diversi sono i procedimenti numerici utilizzati per la soluzione del sistema, sia esso il sistema originario alle derivate parziali o quello trasformato alle derivate ordinarie: in particolare si hanno schemi di tipo esplicito o implicito analogamente a quanto illustrato nel caso dell'approssimazione cinematica o parabolica.

Il metodo delle caratteristiche è stato largamente utilizzato per le correnti a pelo libero a partire dalla seconda metà degli anni '60 (Amein, 1966⁹; Liggett e Woolhisher, 1967¹⁰). Oggi sono più frequentemente utilizzati gli schemi alle differenze finite. Tuttavia il metodo delle caratteristiche, per la stretta relazione fra aspetti fisici e proprietà matematiche propria del metodo, e inoltre perché considerato generalmente più preciso, continua a essere utilizzato quantomeno per una verifica dei risultati ottenuti con altri procedimenti numerici ovvero quale strumento per un'analisi di primo tentativo di problemi complessi. Ancora oggi il metodo delle caratteristiche è preferibile nel caso di campi di moto non lentamente variabili.

Il metodo delle caratteristiche

Come è noto dall'analisi proposta al punto 4.1, qualunque sia la scelta delle due variabili dipendenti in termini delle quali è scritto il sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che descrive la propagazione di onde monodimensionali nelle correnti a pelo libero, tale sistema può tradursi lungo due famiglie di curve caratteristiche (C^+ e C^-) nel piano orario (x, t) in una coppia di equazioni differenziali ordinarie del tipo

$$\frac{dx}{dt} = c_{\pm} = \frac{Q}{\Omega} \pm \sqrt{g \frac{\Omega}{b}} \quad (4.3.64a)$$

$$\frac{d\phi}{dt} + \Gamma_{\pm} \frac{d\Psi}{dt} + M_{\pm} = 0 \quad (4.3.64b)$$

dove i segni '+' e '-' si applicano alle curve C^+ e C^- rispettivamente. Nelle (4.3.64) Φ e Ψ individuano due generiche variabili dipendenti (portata o velocità media, livello del pelo libero o profondità), Γ_{\pm} e M_{\pm} sono coefficienti che possono dipendere in generale da Φ e Ψ ma non dalle derivate di Φ e Ψ rispetto a x e t . Alle (4.3.64) si perviene, come noto, attraverso opportuna combinazione lineare delle equazioni differenziali di partenza ovvero, seguendo l'approccio matriciale, sulla base della definizione delle linee caratteristiche quali curve lungo le quali la soluzione del problema differenziale risulta indeterminata (vedi punto 4.1. b).

Si noti che la quantità $\sqrt{g\Omega/b}$ coincide con la celerità di propagazione di onde lunghe di piccola ampiezza (a rigore perturbazioni di ampiezza infinitesima) nelle correnti a pelo libero. Dunque rispetto a un osservatore fisso

⁹Amein M. (1966) Water Resour. Res., 2(1).

¹⁰Liggett J.A., Woolhiser D.A. (1967) J. Eng. Mech. Div. ASCE, 93 (EM2).

la relazione (4.3.64a) definisce la velocità di propagazione di due fronti d'onda, il primo dei quali (C^+) si propaga sempre nella direzione del moto, il secondo in movimento nella stessa direzione del primo o in direzione opposta a seconda che la corrente sia supercritica ($|U| > \sqrt{g\Omega/b}$) ovvero subcritica ($|U| < \sqrt{g\Omega/b}$).

La relazione di compatibilità (4.3.64b) quantifica le variazioni nel tempo delle quantità Φ e Ψ avvertite da un osservatore solidale con tali fronti d'onda. Naturalmente la relazione valida per un osservatore solidale con il fronte (differenziale ordinaria) risulta più semplice rispetto alla relazione che esprime il cambiamento nel tempo e nello spazio delle quantità Φ e Ψ valida per un osservatore fisso (sistema differenziale alle derivate parziali originario). In particolare per il primo osservatore la propagazione dell'onda risulta stazionaria se l'onda non si deforma durante la propagazione. Forme alternative della relazione (4.3.64b), posto per semplicità $\beta = 1$, si scrivono in termini di Q e h nella forma.

$$\frac{dQ}{dt} + b \left(c_{\pm} - \frac{2Q}{\Omega} \right) \frac{dh}{dt} - \frac{Q^2}{\Omega^2} \Omega_{,x} |h + \frac{Q|Q|}{C^2 R_i \Omega} = 0 \quad (4.3.65)$$

o, in termini di Q e Y ,

$$\frac{dQ}{dt} + b \left(c_{\pm} - \frac{2Q}{\Omega} \right) \frac{dY}{dt} - \frac{Q^2}{\Omega^2} \Omega_{,x} |Y - g\Omega i_f + \frac{Q|Q|}{C^2 R_i \Omega} = 0 \quad (4.3.66)$$

ovvero, in termini di U e Y ,

$$\frac{dU}{dt} \pm \sqrt{\frac{gb}{\Omega}} \frac{dY}{dt} \pm \sqrt{\frac{g}{\Omega b}} U \Omega_{,x} |Y + \frac{U|U|}{C^2 R_i} - g i_f = 0 \quad (4.3.67)$$

dalle quali si ricava facilmente la struttura dei coefficienti Γ_{\pm} e M_{\pm} della (4.3.64b).

Una semplice interpretazione fisica della soluzione alle caratteristiche in correnti monodimensionali può ottenersi costruendo sul piano orario (x, t) la soluzione del problema relativo a un tronco di lunghezza $(x_N - x_o)$. Supponiamo assegnate opportune condizioni al contorno (per esempio l'idrogramma di piena relativo alla sezione di monte $x = x_o$ e un'assegnata relazione $\Phi = f(\Psi)$ nella sezione di valle $x = x_N$) e iniziali (andamento di Ψ e Φ lungo x per $t = 0$), e consideriamo il caso subcritico. Nella soluzione alle caratteristiche si procede dalla condizione iniziale (asse x) e si avvanza nel tempo determinando Φ e Ψ agli istanti di tempo successivi.

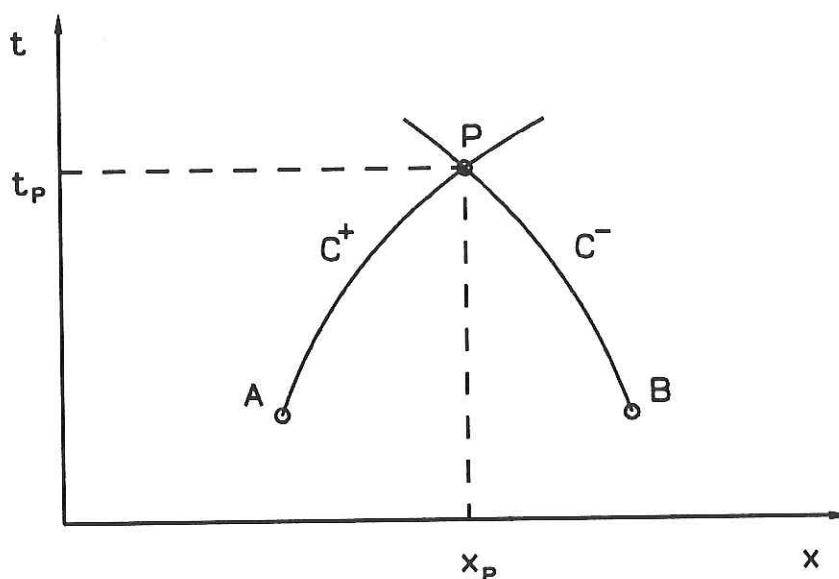


Figura 4.17: Il metodo delle caratteristiche: lo schema a tre punti.

In generale una sola curva caratteristica non è sufficiente per determinare, nota la soluzione a un certo istante temporale in un punto A del piano orario di coordinate (x_A, t_A) , la soluzione a un tempo successivo nel punto P (di coordinate (x_P, t_P)) per cui passa una caratteristica uscente da A (vedi figura 4.17). Infatti le quattro incognite Φ_P, Ψ_P, x_P, t_P non possono essere determinate usando due sole equazioni del tipo (4.3.64a) e (4.3.64b).

La soluzione nel punto generico P del piano orario, in funzione della soluzione nota agli istanti precedenti, è invece ottenibile considerando le due curve caratteristiche che si incontrano in P . Con riferimento alla figura siano AP e BP tali caratteristiche, la prima positiva, la seconda negativa, essendo A e B due punti del piano orario in cui sia già nota la soluzione per Φ e Ψ . Le quattro quantità incognite in P si determinano quindi utilizzando due equazioni del tipo (4.3.64a), cioè le due equazioni delle curve caratteristiche AP e BP (rispettivamente C^+ e C^-) e due equazioni del tipo (4.3.64b), cioè le due equazioni di compatibilità valide rispettivamente su AP e BP . Tale procedimento risolutivo è detto *schema a tre punti*.

Consideriamo, a titolo di esempio, il caso di alvei a sezione rettangolare. Essendo l'alveo cilindrico le equazioni alle caratteristiche si semplificano considerevolmente. Le (4.3.64), utilizzando quali variabili dipendenti U e Y ,

si riducono alle relazioni

$$\frac{dx}{dt} = c_{\pm} = U \pm \sqrt{gY} \quad (4.3.68a)$$

$$\frac{d}{dt}(U \pm \sqrt{gY}) + f = 0 \quad (4.3.68b)$$

con

$$f = \frac{U|U|}{C^2 R_i} - g^i f \quad (4.3.69)$$

Se si trascura il termine non omogeneo, cioè si pone $f = 0$ (alveo orizzontale, attrito trascurabile) la (4.3.68) si integra immediatamente nella forma

$$U \pm 2\sqrt{gY} = \text{costante} \quad (4.3.70)$$

Dunque noti i valori di U e Y nei due punti del piano orario A e B si determinano le funzioni incognite U_P e Y_P nel punto P situato all'intersezione delle caratteristiche che passano per A e B attraverso le relazioni

$$U_A + 2\sqrt{gY_A} = U_P + 2\sqrt{gY_P} \quad (\text{sulla } C^+, AP) \quad (4.3.71a)$$

$$U_B - 2\sqrt{gY_B} = U_P - 2\sqrt{gY_P} \quad (\text{sulla } C^-, BP) \quad (4.3.71b)$$

Il procedimento deve essere opportunamente modificato in corrispondenza della frontiera ($x = x_o, x = x_N$). Qui l'informazione relativa a una delle due equazioni di compatibilità (4.3.79a,b) va sostituita dalla condizione al contorno che fornisce una seconda relazione fra U_P e Y_P , esprimibile nella forma generale $f(U_P, Y_P) = 0$, necessaria per determinare la soluzione in P . Con riferimento alla figura 4.18 si ha quindi

$$f_o(U_P, Y_P) = 0 \quad U_B - 2\sqrt{gY_B} = U_P - 2\sqrt{gY_P} \quad (\text{in } x = x_o) \quad (4.3.72a)$$

$$f_N(U_R, Y_R) = 0 \quad U_A + 2\sqrt{gY_A} = U_R + 2\sqrt{gY_R} \quad (\text{in } x = x_N) \quad (4.3.72b)$$

La soluzione completa in P richiede evidentemente la localizzazione del punto P sul piano orario, cioè la determinazione di (x_P, t_P) nota la localizzazione dei punti A e B e nota la soluzione in tali punti. Ciò richiede l'integrazione della (4.3.68a) lungo le caratteristiche AP e BP . Se si assume $c_{\pm} = \text{costante}$ la (4.3.68a) fornisce immediatamente

$$x_P - x_A = c_+(t_P - t_A) = (U_A + \sqrt{gY_A})(t_P - t_A) \quad (4.3.73a)$$

$$x_P - x_B = c_-(t_P - t_B) = (U_B + \sqrt{gY_B})(t_P - t_B) \quad (4.3.73b)$$

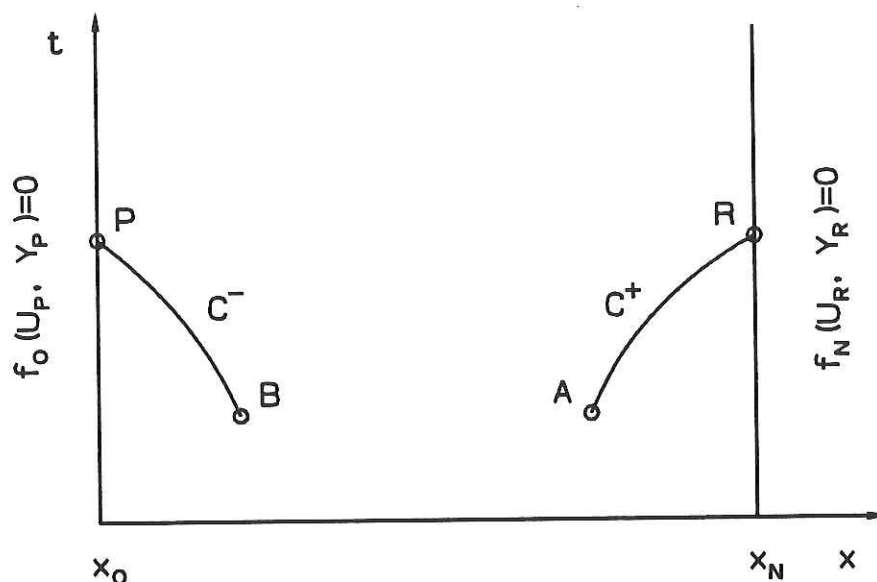


Figura 4.18: Il metodo delle caratteristiche: introduzione delle condizioni al contorno.

dalle quali si ricavano x_P e t_P . E' ovvio come si modificano le (4.3.73) in corrispondenza della frontiera dove x è fissato.

In generale tuttavia la celerità c_{\pm} non si mantiene costante lungo le caratteristiche, perché funzione dei valori locali di U e Y , ed è quindi necessario, così come per la soluzione della (4.3.68b) con $f \neq 0$ o in generale della (4.3.64b), fare ricorso a tecniche di risoluzione numeriche. A tale questione è dedicato il prossimo paragrafo.

Il procedimento qui descritto è del tutto generale e può essere iterato: esso conduce evidentemente alla soluzione in ciascun punto del piano orario in cui si ricerca la soluzione note che siano le condizioni iniziali e al contorno.

La determinazione della soluzione in P può dunque pensarsi come risultato dell'incontro in P di due osservatori che partono a un certo tempo $t = t_0$ da A e da B e si muovono solidali con due fronti d'onda, di ampiezza infinitesima, che si propagano in direzione opposta. Ciascun osservatore porta con sé l'informazione relativa alla soluzione nel punto di partenza ed è testimone, durante il cammino verso P , delle variazioni di Φ e Ψ in accordo con quanto descritto dalla equazione di compatibilità (4.3.64b). In particolare le variazioni nel tempo delle variabili Φ e ψ sono legate dalla (4.3.64b) positiva per l'osservatore partito da A e dalla (4.3.64b) negativa per l'osservatore partito

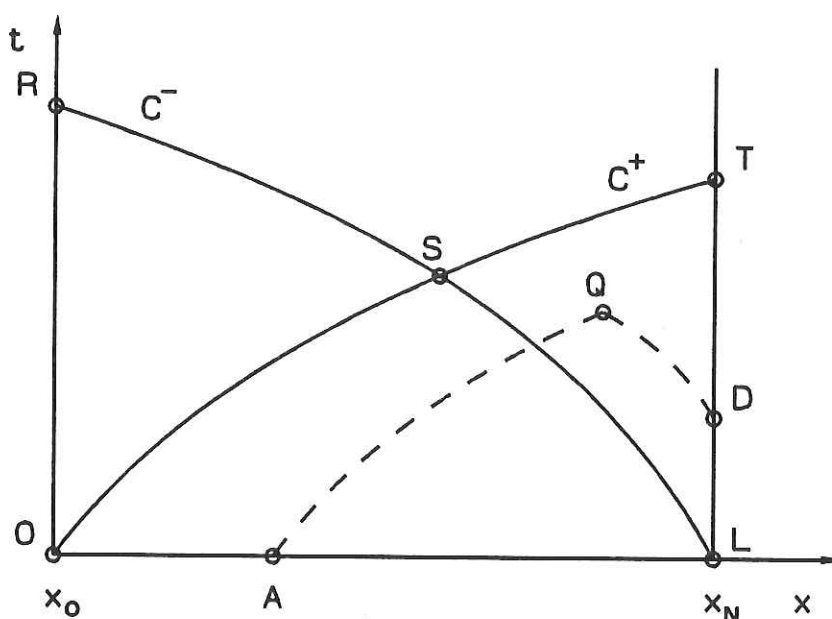


Figura 4.19: Il metodo delle caratteristiche: zone di influenza della condizione iniziale e delle condizioni al contorno.

da B . In P i due osservatori sono in grado, mettendo insieme le rispettive informazioni, di procedere alla valutazione di Φ_P e Ψ_P . Successivamente i due osservatori riprendono il loro cammino utilizzando i valori di Φ e Ψ calcolati in P quali nuovi dati iniziali.

Si noti che in realtà le variazioni di Φ e Ψ sono continue, cioè l'osservatore uscente da A incontra infinite caratteristiche di segno opposto procedendo verso P e analogamente l'osservatore da B . Il procedimento descritto costituisce pertanto la discretizzazione di un processo continuo, cioè coincide con la metodologia che viene impiegata nella soluzione numerica delle equazioni nella quale è necessario fare riferimento a uno schema discreto.

Sulla base delle considerazioni sopra riportate si possono facilmente identificare sul piano orario le *zone di influenza delle condizioni iniziali e delle condizioni al contorno*. Supponiamo ancora il moto subcritico e assumiamo che le curve caratteristiche di una stessa famiglia (C^+ o C^-) non si intersechino nella regione del piano orario in esame. Con riferimento alla figura 4.19 si evidenziano tre zone:

I) Regione OSL, area compresa fra l'asse x e le due caratteristiche (rispettivamente C^+ e C^-) uscenti dalla sezione di monte ($x = x_0$) e di valle ($x = x_N$) all'istante iniziale (che si intersecano al punto S). In tale regio-

ne la soluzione in ogni punto può essere ottenuta attraverso l'intersezione di due curve caratteristiche che hanno origine a partire dall'asse x all'istante iniziale. Tale zona corrisponde dunque al *dominio di influenza diretta della condizione iniziale*.

II) Regione OSR+LST, con T e R punti in cui le due caratteristiche uscenti dalla sezione di monte e di valle all'istante iniziale raggiungono la sezione di valle e di monte rispettivamente. In tale regione la soluzione in ogni punto è determinata non solo dalle condizioni iniziali ma anche dalle condizioni al contorno, cioè la soluzione è ricavabile sulla base dell'intersezione di una caratteristica uscente dall'asse x all'istante iniziale (es. la C^+AQ) con una caratteristica che ha origine dalle sezioni di estremità a un tempo successivo (es. la C^-DQ).

III) Regione aperta delimitata dalla curva RST. In tale regione la soluzione è ottenuta attraverso l'intersezione di due caratteristiche entrambe uscenti dalle sezioni di estremità. Nella zona prossima alla curva RST persiste una certa influenza indiretta delle condizioni iniziali, ma tale influenza diminuisce progressivamente nel tempo e *l'influenza delle condizioni al contorno diventa predominante*.

In condizioni *subcritiche* le due caratteristiche passanti per un punto hanno direzione opposta. Ciò implica che l'effetto di un disturbo introdotto nel punto $A(x_A, t_A)$ del piano orario può propagarsi sia verso monte sia verso valle, ma può influenzare soltanto la regione compresa per $t > t_A$ fra le due caratteristiche C^+ e C^- passanti per il punto. Tale regione è denominata *dominio di influenza* del punto A (figura 4.20). Alternativamente si definisce quale *dominio di dipendenza* della soluzione in un generico punto $P(x_P, t_P)$ del piano orario l'area compresa per $t < t_P$ fra le due caratteristiche C^+ e C^- che si incontrano nel punto P (figura 4.21). Infatti la propagazione di informazioni da punti sul piano orario che giacciono al di fuori di tale regione non è sufficientemente rapida da raggiungere la sezione x_P per $t \leq t_P$. Dunque la soluzione nel punto P e la posizione stessa del punto P (poiché la celerità, cioè l'andamento delle curve caratteristiche, è funzione della soluzione) dipende completamente dalla soluzione nella zona tratteggiata ABP di figura 4.21.

Se il moto è localmente *supercritico* le due caratteristiche passanti per un punto hanno la stessa direzione, cioè la soluzione in un punto può dipendere solo da informazioni provenienti da monte e può influenzare solo la soluzione in punti posti a valle (figura 4.22).

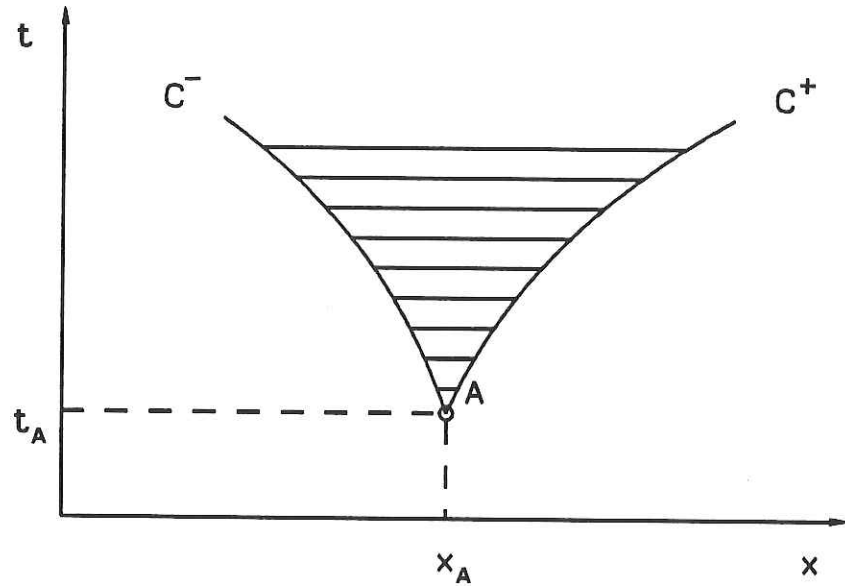


Figura 4.20: Dominio di influenza nel caso subcritico (area tratteggiata).

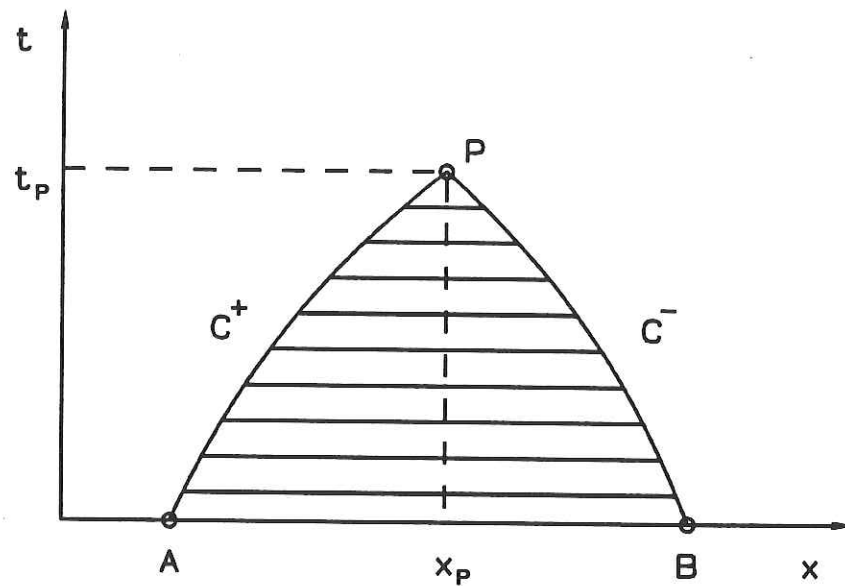


Figura 4.21: Dominio di dipendenza nel caso subcritico (area tratteggiata).

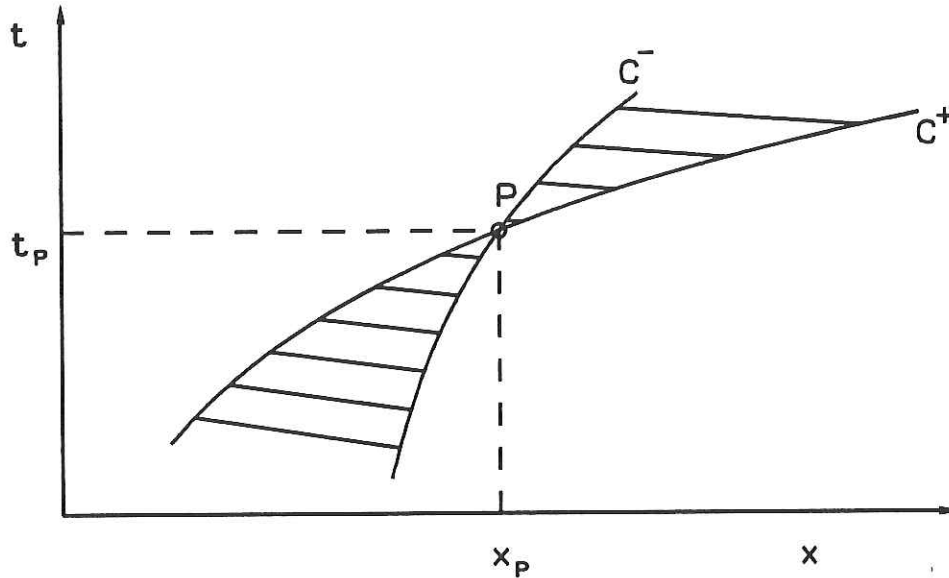


Figura 4.22: Dominio di influenza e di dipendenza nel caso supercritico (area tratteggiata).

Esistono numerosi schemi numerici che consentono la soluzione del problema sul piano orario secondo lo schema a tre punti descritto più sopra. Le equazioni caratteristiche sono prima trasformate in equazioni alle differenze finite e quindi risolte numericamente. Con riferimento alla figura 4.17 e considerando le equazioni (4.3.64a,b), la trasformazione delle equazioni differenziali caratteristiche in equazioni algebriche si può effettuare o attraverso l'approssimazione lineare

$$(x_P - x_A) = (c_+)_A(t_P - t_A) \quad (4.3.74a)$$

$$(x_P - x_B) = (c_-)_B(t_P - t_B) \quad (4.3.74b)$$

$$(\Phi_P - \Phi_A) + (\Gamma_+)_A(\Psi_P - \Psi_A) + (M_+)_A(t_P - t_A) = 0 \quad (4.3.74c)$$

$$(\Phi_P - \Phi_B) + (\Gamma_-)_B(\Psi_P - \Psi_B) + (M_-)_B(t_P - t_B) = 0 \quad (4.3.74d)$$

ovvero utilizzando la regola del trapezio

$$(x_P - x_A) = \frac{1}{2} [(c_+)_A + (c_+)_P] (t_P - t_A) \quad (4.3.75a)$$

$$(x_P - x_B) = \frac{1}{2} [(c_-)_B + (c_-)_P] (t_P - t_B) \quad (4.3.75b)$$

$$(\Phi_P - \Phi_A) + \frac{1}{2} [(\Gamma_+)_A + (\Gamma_+)_P] (\Psi_P - \Psi_A) + \frac{1}{2} [(M_+)_A + (M_+)_P] (t_P - t_A) = 0$$

(4.3.75c)

$$(\Phi_P - \Phi_B) + \frac{1}{2} [(\Gamma_-)_B + (\Gamma_-)_P] (\Psi_P - \Psi_B) + \frac{1}{2} [(M_-)_B + (M_-)_P] (t_P - t_B) = 0$$

(4.3.75d)

Nel primo caso la soluzione in P per x_P, t_P, Φ_P e Ψ_P è *esplicita*. Nel secondo caso si tratta evidentemente di un procedimento *implicito* che andrà quindi risolto iterativamente sulla base di valori di tentativo in P . Per esempio al generico passo n di iterazione la (4.3.75)a si scriverà

$$(x_P^{(n+1)} - x_A) = \frac{1}{2} [(c_+)_A + (c_+)_P^{(n)}] (t_P^{(n+1)} - t_A) \quad (4.3.76)$$

e analogamente per le (4.3.75b,d).

Due sono gli schemi numerici più frequentemente usati per la soluzione delle (4.3.74) o (4.3.75):

i) *Schema GC - Reticolo sulle curve caratteristiche.*

Tale procedimento risolve le equazioni su un reticolo a maglie irregolari non predisposto a priori ma definito dall'intersezione delle curve caratteristiche tracciate a partire da una serie di punti noti sull'asse x all'istante iniziale (figura 4.23). In tal modo nota la soluzione all'istante iniziale nei punti A_0, A_1, A_2, \dots , si valuta la posizione e la relativa soluzione, attraverso applicazione ripetuta dello *schema a tre punti*, di una seconda serie di punti B_0, B_1, B_2, \dots , che sono in generale relativi a istanti di tempo diversi e sono localizzati (nello spazio) in sezioni differenti rispetto a quelle dei punti iniziali. Tale serie di punti costituisce la soluzione iniziale per la determinazione della soluzione in una successiva serie di punti C_0, C_1, \dots , e così via.

L'introduzione progressiva delle condizioni al contorno avviene secondo il procedimento descritto più sopra (equazioni 4.3.72). Se il moto è subcritico una condizione al contorno è assegnata su ciascuna delle due frontiere dove una sola curva caratteristica è disponibile. Si noti che in tal caso la coordinata x (x_0 o x_N) del punto di frontiera è prefissata. L'equazione caratteristica fornisce la coordinata 'temporale' del punto. L'equazione di compatibilità e la condizione al contorno forniscono la soluzione per Φ e Ψ . Se il moto è supercritico nessuna caratteristica può raggiungere la sezione di monte. Dunque le due condizioni al contorno sono imposte nella sezione di monte dove la soluzione è completamente determinata. La soluzione sui punti di frontiera di valle è determinata, come per i punti interni, dall'intersezione di

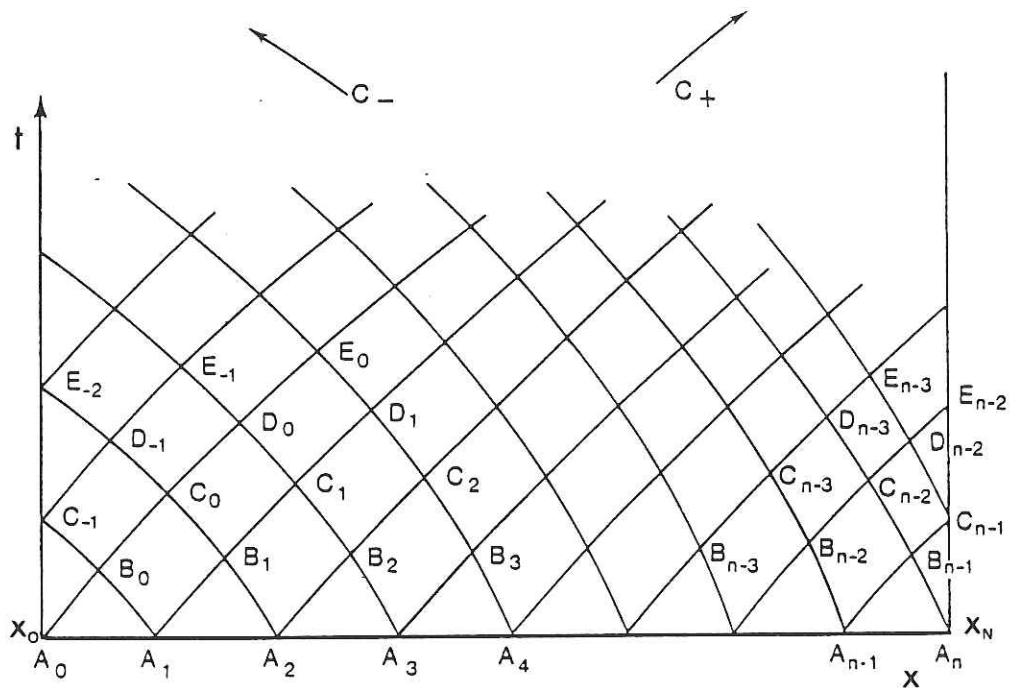


Figura 4.23: Metodo delle caratteristiche: reticolo sulle curve caratteristiche (schema GC).

due caratteristiche C^+ e C^- . Le intersezioni sulla maglia delle caratteristiche non si verificano in generale per $x = x_N$, per cui sarà necessario ricorrere a un procedimento di interpolazione.

Lo schema GC presenta alcuni vantaggi: è il metodo numerico più diretto, il più aderente alla fisica del fenomeno in esame e anche generalmente il più accurato, soprattutto se si utilizza lo schema implicito. In particolare il reticolo delle caratteristiche è più fitto là dove si verificano le variazioni più rapide nella soluzione, cioè la maglia costituita dalle caratteristiche si adatta naturalmente per fornire una soluzione più precisa dove richiesto dalla fisica del processo in esame.

Il principale svantaggio consiste nel fatto che i nodi del *reticolo computazionale* sono *sparsi* in maniera più o meno irregolare sul piano orario perché le coordinate (x, t) sono in tale schema variabili dipendenti: per ricavare la soluzione in sezioni e istanti di tempo prefissati è dunque necessario fare ricorso a posteriori a un processo di interpolazione bidimensionale. Ciò pone

un problema non facilmente superabile quando è necessario valutare la soluzione in sezioni prefissate lungo l'asse x (il caso delle onde di piena in alvei naturali per i quali sono note le caratteristiche geometriche di alcune sezioni) ovvero quando il problema da risolvere sia complicato dalla presenza di condizioni al contorno interne (reti di canali, ramificazioni, effetti localizzati). Le interpolazioni necessarie in tal caso possono costituire una fonte importante di errore.

Nel caso dello schema GC il passo temporale è automaticamente fissato perché la soluzione procede da un punto al punto successivo con un passo temporale pari a $\Delta x/c$, cioè rispetta automaticamente la condizione di Courant. Ciò implica che lo schema non ha problemi di stabilità, ma d'altra parte impone l'uso di un passo temporale che può risultare assai ridotto (essendo c molto maggiore dell'effettiva velocità di propagazione dell'onda di piena) e richiedere dunque un tempo di calcolo elevato per la valutazione della propagazione di una piena.

ii) *Schema STI - Reticolo a intervalli di tempo fissati.*

Tale schema, proposto originariamente da Hartree (1952)¹¹ e successivamente divulgato da da Lister (1960)¹², consiste nella soluzione delle equazioni alle caratteristiche su un reticolo spazio temporale fissato. Con riferimento alla figura 4.24 il punto P incognito dello schema a tre punti è fatto coincidere con un punto nodale, (x_j, t_{k+1}) in figura, al nuovo livello temporale $k + 1$. Le due caratteristiche che si incontrano in P intersecano il livello temporale precedente (k) in due punti A e B che in generale non coincidono con punti nodali sui quali è nota la soluzione. Il procedimento risolutivo richiede dunque un lavoro di interpolazione per la valutazione delle funzioni Φ e Ψ nei punti A e B nota la soluzione sul reticolo. Utilizzando lo schema risolutivo esplicito (4.3.74a,d) e ricordando che il passo temporale Δt è in tal caso fissato si ricava, dalle due equazioni valide sulle caratteristiche per P ,

$$(\Phi_j^{k+1} - \Phi_A) + (\Gamma_+)_A(\Psi_j^{k+1} - \Psi_A) + (M_+)_A\Delta t = 0 \quad (4.3.77a)$$

$$(\Phi_j^{k+1} - \Phi_B) + (\Gamma_-)_B(\Psi_j^{k+1} - \Psi_B) + (M_-)_B\Delta t = 0 \quad (4.3.77b)$$

Tale sistema può essere risolto per determinare le quantità incognite $(\Phi_j^{k+1}, \Psi_j^{k+1})$ nel punto P . Le quantità Φ_A, Φ_B, Ψ_A e Ψ_B , e conseguentemente i coefficienti Γ_{\pm} e M_{\pm} , si determinano per interpolazione. Seguendo il

¹¹Hartree D.R. (1952) Los Alamos Sci. Lab., Rep. LA-HU-1.

¹²Lister M. (1960) in *Mathematical Methods for Digital Computers* (Ralston & Wilf, eds.), Wiley, New York.

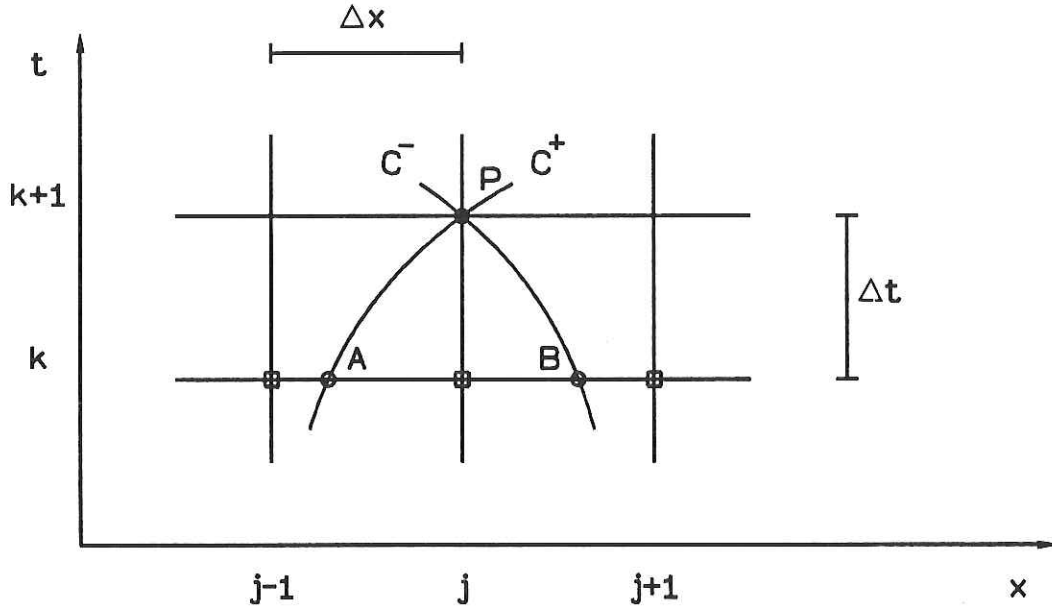


Figura 4.24: Metodo delle caratteristiche: reticolo a intervalli di tempo fissati (schema STI).

metodo proposto da Wylie e Streeter (1978)¹³ si pone (con riferimento alla figura 4.24)

$$\frac{U_j^k - U_A}{U_j^k - U_{j-1}^k} = \frac{x_j - x_A}{x_j - x_{j-1}} \quad \frac{\tau_j^k - \tau_A}{\tau_j^k - \tau_{j-1}^k} = \frac{x_j - x_A}{x_j - x_{j-1}} \quad (4.3.78a, b)$$

con $\tau = \sqrt{g\Omega/b}$. Dalla (4.3.74a) segue

$$\frac{x_j - x_A}{x_j - x_{j-1}} = \frac{(c_+)_A \Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_A + \tau_A) \quad (4.3.79)$$

Sostituendo la (4.3.79) nelle (4.3.78a,b) segue:

$$\tau_A = \frac{\tau_j^k + \Delta t(\tau_{j-1}^k U_j^k - \tau_j^k U_{j-1}^k)/\Delta x}{1 + \Delta t[(c_+)_j^k - (c_+)_{j-1}^k]/\Delta x} \quad (4.3.80a)$$

$$U_A = \frac{U_j^k + \Delta t(U_j^k - U_{j-1}^k)\tau_A/\Delta x}{1 + \Delta t(U_j^k - U_{j-1}^k)/\Delta x} \quad (4.3.80b)$$

¹³Wylie E.B., Streeter V.L. (1978) Fluid Transients, Mc Graw Hill, New York.

Note τ_A e U_A si valutano Φ_A e Ψ_A utilizzando le relazioni

$$\Phi_A = \Phi_j^k - (\Phi_j^k - \Phi_{j-1}^k) \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_A + \tau_A) \quad (4.3.81a)$$

$$\Psi_A = \Psi_j^k - (\Psi_j^k - \Psi_{j-1}^k) \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_A + \tau_A) \quad (4.3.81b)$$

che si ricavano interpolando linearmente le funzioni Φ e Ψ con relazioni analoghe alle (4.3.78a,b) e utilizzando ancora la (4.3.79).

Analogamente si ricava

$$\tau_B = \frac{\tau_j^k + \Delta t(\tau_j^k U_{j+1}^k - \tau_{j+1}^k U_j^k) / \Delta x}{1 + \Delta t[(c_+^k)_{j+1} - (c_-^k)_j] / \Delta x} \quad (4.3.82a)$$

$$U_B = \frac{U_j^k + \Delta t(U_{j+1}^k - U_j^k) \tau_B / \Delta x}{1 + \Delta t(U_{j+1}^k - U_j^k) / \Delta x} \quad (4.3.82b)$$

$$\Phi_B = \Phi_j^k - (\Phi_{j+1}^k - \Phi_j^k) \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_B - \tau_B) \quad (4.3.82c)$$

$$\Psi_B = \Psi_j^k - (\Psi_{j+1}^k - \Psi_j^k) \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_B - \tau_B) \quad (4.3.82d)$$

Naturalmente gli intervalli spaziale e temporale dovranno essere scelti in modo tale che il dominio di dipendenza del nodo $P(x_j, t_{k+1})$ risulti compreso entro la regione delimitata dalle caratteristiche C^+ uscente dal nodo (x_{j-1}, t_k) e C^- uscente dal nodo (x_{j+1}, t_k) cioè deve risultare soddisfatta la condizione di Courant-Friedrichs-Lewy. Lo schema risulta assai più complicato se si adotta il modello implicito (4.3.75a,d).

Lo schema STI consente di superare gli svantaggi propri del metodo GC perché in questo caso la soluzione è determinata su *punti fissi nel piano orario*. Tuttavia l'interpolazione necessaria a ogni passo ne snatura di fatto l'identità di metodo delle caratteristiche: tale schema presenta infatti le stesse caratteristiche di stabilità e precisione dei metodi alle differenze finite. Ciò è conseguenza del fatto che il procedimento di interpolazione, pur se semplicemente monodimensionale, costituisce parte integrante del procedimento di soluzione numerica, laddove per lo schema GC costituiva un procedimento utilizzato a posteriori per riportare la soluzione ottenuta su un reticolo prefissato. In ogni caso, se lo schema è esplicito, il criterio di Courant pone un limite molto restrittivo sul passo temporale.

Fra gli schemi impliciti che operano su un reticolo prefissato merita di essere ricordato quello proposto da Schmitz et al. (1980)¹⁴. Si tratta di uno

¹⁴Schmitz F., Edenhofer J. (1980) Proc. Int. Conf. on Water Resour. Dev., IAHR, Taipei, Taiwan.

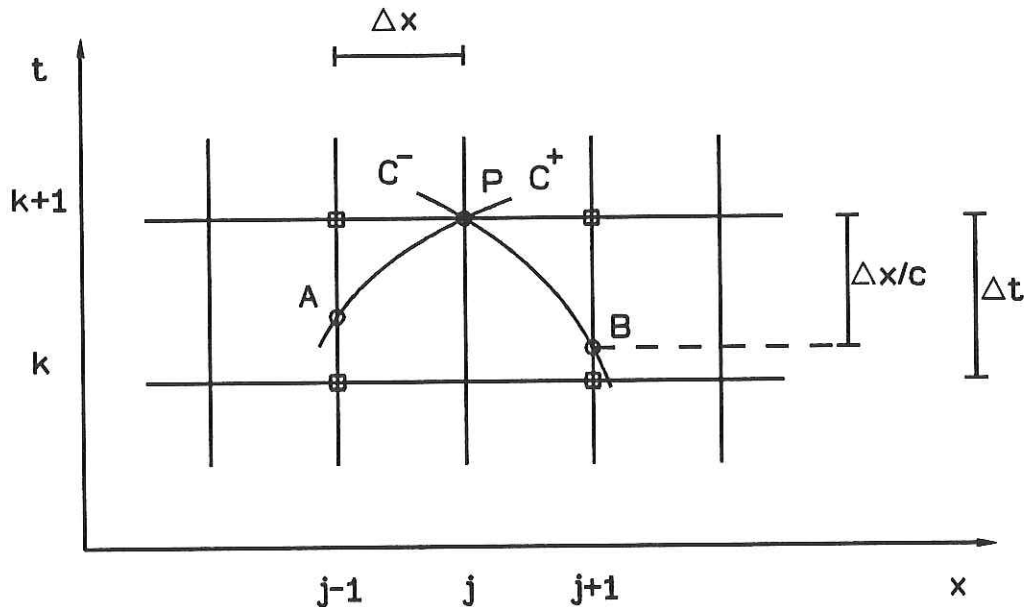


Figura 4.25: Metodo delle caratteristiche: soluzione implicita di Schmitz (1980).

schema non soggetto al vincolo di Courant in cui il passo temporale è scelto in modo tale da eccedere l'intervallo temporale caratteristico $\Delta x/c$ (figura 4.25). Le due caratteristiche che si incontrano in $P(x_j, t_{k+1})$ raggiungono le coordinate x_{j-1} e x_{j+1} nei punti A e B a un tempo compreso fra t_k e t_{k+1} . I valori di Φ e Ψ nei punti A e B si determinano per interpolazione nel tempo fra la soluzione nota nei nodi (x_{j-1}, t_k) e (x_{j+1}, t_k) e la soluzione incognita nei nodi (x_{j-1}, t_{k+1}) e (x_{j+1}, t_{k+1}) . In tal modo le quattro equazioni caratteristiche per determinare la soluzione in P contengono implicitamente le ulteriori incognite nei nodi adiacenti. Estendendo tale procedimenti a tutto il dominio (x_o, x_N) tutte le incognite nei punti del reticolo al tempo t_{k+1} sono legate implicitamente da un sistema di equazioni.

Schemi alle differenze finite

Anche per il sistema di equazioni completo sono stati sviluppati sia schemi numerici espliciti sia impliciti.

Schemi espliciti

Gli schemi *espliciti*, introdotti per la prima volta nello studio della pro-

pagazione delle piene da Isaacson et al. (1958)¹⁵, utilizzano quozienti alle differenze in avanti per la valutazione delle derivate temporali, con eventuale introduzione di un coefficiente di peso α per consentire anche l'influenza dei nodi reticolari adiacenti (come nel caso degli schemi descritti per i modelli cinematico e parabolico), e differenze centrali ovvero in avanti (o all'indietro) per le derivate spaziali, valutate in termini della soluzione al livello temporale noto. Gli altri termini delle equazioni dinamiche che non sono differenziali sono rappresentati, a seconda della complessità dello schema prescelto e della precisione desiderata, in funzione delle variabili in un singolo punto o come media fra i valori in due o più punti nodali.

La figura 4.26 riporta gli schemi di rappresentazione delle derivate temporali e spaziali più frequentemente utilizzati. Sostituendo tali strutture algebriche nelle equazioni differenziali di partenza si ottiene per ogni punto reticolare una coppia di equazioni lineari algebriche la cui soluzione fornisce simultaneamente il valore delle incognite nel nodo centrale (j) al nuovo livello temporale ($k+1$).

Dalle (4.3.1a,b) adottando uno schema alle differenze centrali (spaziali), si ottiene:

$$h_j^{k+1} = h_j^k + \frac{\alpha}{2}(h_{j+1}^k - 2h_j^k + h_{j-1}^k) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1}{b}\right)_j^k (Q_{j+1}^k - Q_{j-1}^k) \quad (4.3.83a)$$

$$\begin{aligned} Q_j^{k+1} &= Q_j^k + \frac{\alpha}{2}(Q_{j+1}^k - 2Q_j^k + Q_{j-1}^k) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\beta \frac{Q}{\Omega}\right)_j^k (Q_{j+1}^k - Q_{j-1}^k) + \\ &- \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(g\Omega - \beta b \frac{Q^2}{\Omega^2}\right)_j^k (h_{j+1}^k - h_{j-1}^k) + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\beta \frac{Q^2}{\Omega^2}\right)_j^k [(\Omega_{j+1}^k - \Omega_{j-1}^k)_{h_{j+1}^k} + (\Omega_{j+1}^k - \Omega_{j-1}^k)_{h_{j-1}^k}] - \Delta t \left(\frac{Q|Q|}{R_i C^2 \Omega}\right)_j^k \end{aligned} \quad (4.3.83b)$$

dove i coefficienti si valutano attraverso relazioni del tipo

$$(A)_j^k = \frac{1}{2}\alpha(A_{j+1}^k + A_{j-1}^k) + (1-\alpha)A_j^k \quad (4.3.84)$$

L'imposizione delle condizioni al contorno definisce univocamente in tutto il dominio di definizione la soluzione delle equazioni alle differenze così ottenute. Nel caso esplicito l'introduzione di tali condizioni non è ovvia; infatti

¹⁵Isaacson E., Stoker J.J., Troesch A. (1958) J. Hydraul. Div. ASCE, 84 (HY5).

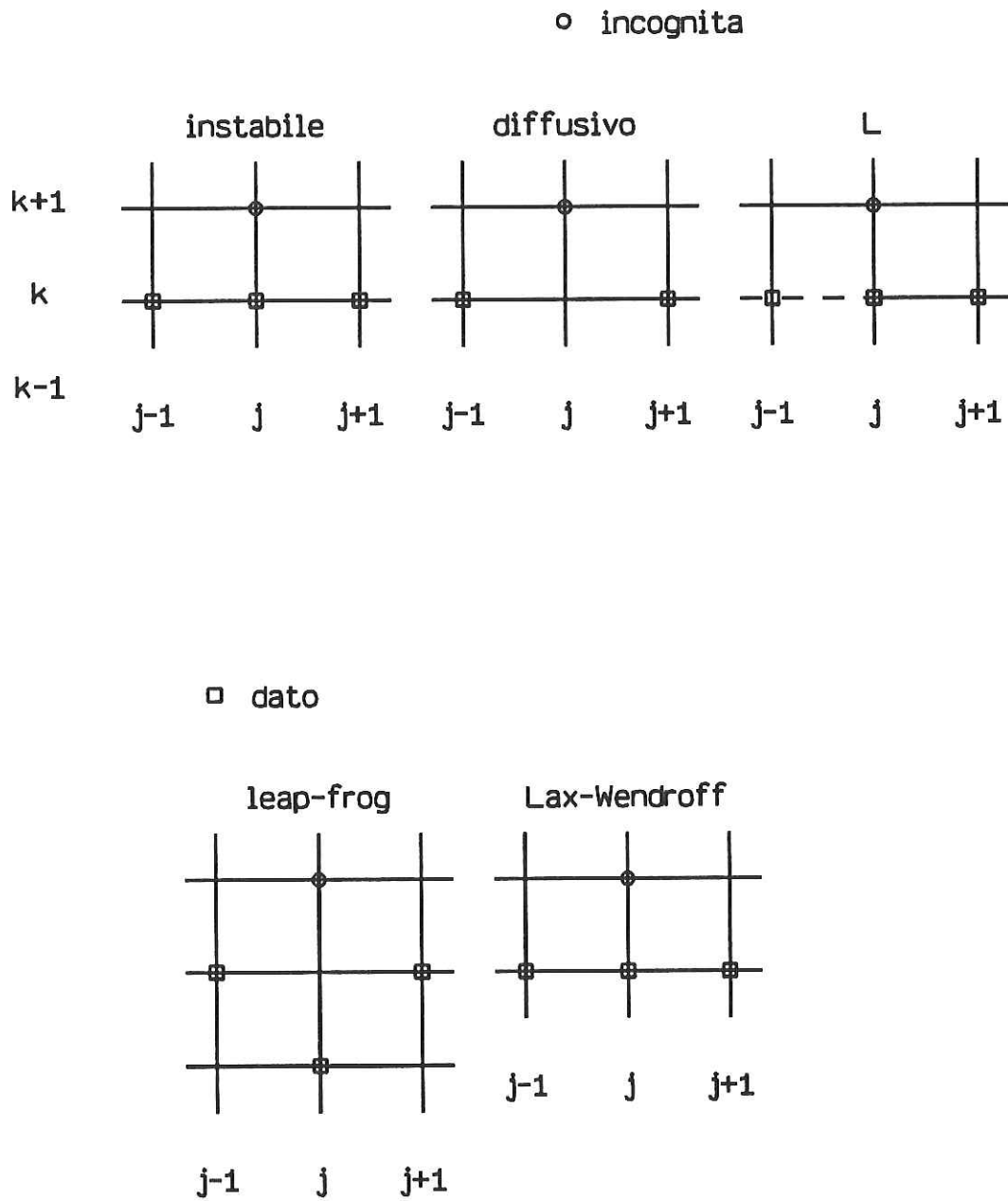


Figura 4.26: Schemi alle differenze finite di tipo esplicito.

per ogni punto reticolare di frontiera si ottiene, modificando opportunamente la cella computazionale, un sistema del tipo (4.3.83) che, insieme alla condizione al contorno, fornisce tre relazioni indipendenti per le due incognite nel nodo. Poiché nessuna delle tre relazioni può essere scartata, l'unica possibilità è quella di utilizzare alla frontiera il metodo delle caratteristiche seguendo lo stesso procedimento adottato nello schema STI per trattare le condizioni al contorno. In tal caso le due incognite nel nodo si valutano facendo sistema fra la condizione al contorno e l'equazione di compatibilità valida sulla caratteristica passante per il punto di frontiera: essendo quest'ultima ricavata dalla combinazione lineare delle due equazioni del moto, è chiaro che tale procedimento soddisfa simultaneamente le tre relazioni. Tale procedimento si applica nel caso subcritico a ciascuno degli estremi; nel caso supercritico le due incognite si valutano a monte con le due condizioni al contorno, a valle con due equazioni caratteristiche.

Lo schema numerico esplicito si trasforma in un modello assai semplice, ma sempre instabile, se $\alpha = 0$ (schema 'instabile' in figura 4.26), mentre per $\alpha = 1$ si traduce nello schema di Lax (schema 'diffusivo' in figura 4.26) utilizzato da Isaacson et al. (1958). Tale schema è stabile purché sia soddisfatto, come vedremo, un vincolo molto restrittivo sul passo temporale. Se si utilizza uno schema asimmetrico rispetto al nodo j (schema 'L' in figura 4.26) la scelta della rappresentazione per la derivata spaziale (in avanti o all'indietro) dipende per ragioni di stabilità dalla direzione del moto locale all'istante di tempo considerato.

La precisione dello schema 'diffusivo' può essere migliorata coinvolgendo due livelli temporali nella determinazione della derivata temporale. Tale procedimento, utilizzato nello schema noto con il nome di 'leap-frog' (figura 4.26), richiede tuttavia uno sforzo computazionale maggiore perché risulta necessario il simultaneo immagazzinamento in memoria della soluzione a tre diversi livelli temporali.

Negli schemi illustrati i termini differenziali sono trasformati in rapporti incrementali basati sull'interpolazione lineare della soluzione nei nodi del reticolo. Nello schema di Lax-Wendroff (1964)¹⁶, per migliorare la precisione, si introducono differenze finite del II ordine: ciò si ottiene differenziando rispetto a x e t il sistema di equazioni originario, eliminando per sostituzione le derivate seconde miste e trasformando le derivate seconde (spaziali) in differenze finite del II ordine attraverso la (4.3.7); infine sostituendo il risultato ottenuto per la derivata prima e seconda (temporale) nello sviluppo in

¹⁶Lax P.D., Wendroff B. (1964) Comm. Pure Appl. Math., 14.

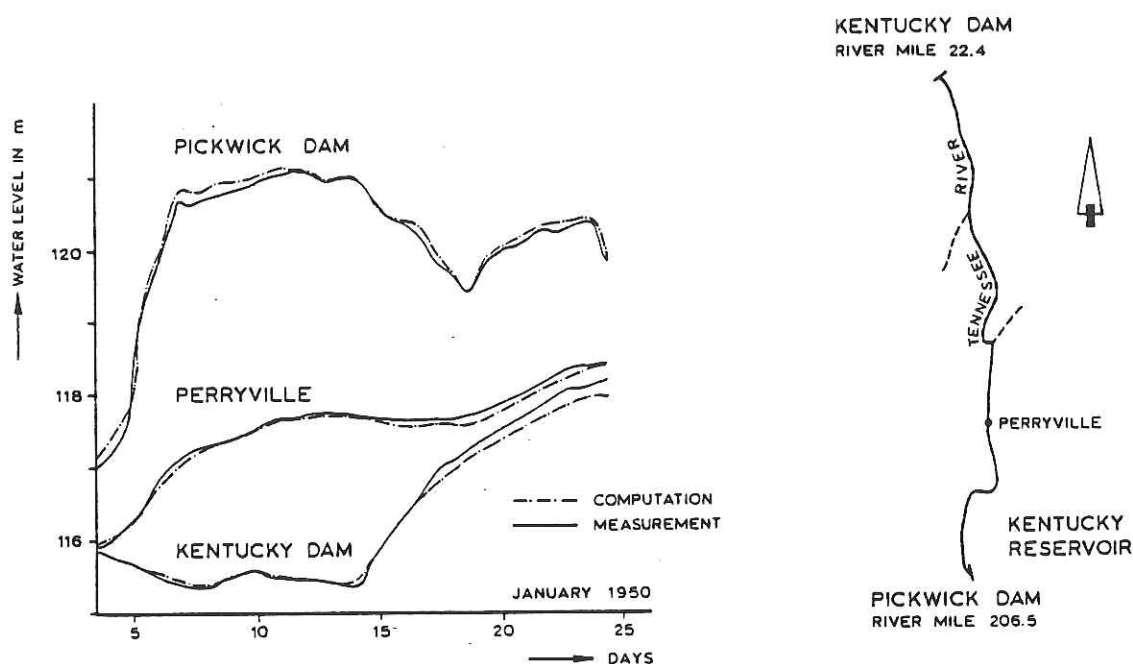


Figura 4.27: Simulazione numerica di un'onda di piena (da Isaacson et al., 1958).

serie di Taylor della generica variabile dipendente incognita F_j^{k+1} nel nodo $(j, k+1)$ si trova:

$$F_j^{k+1} = F_j^k + \Delta t \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_j^k + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \right)_j^k \quad (4.3.85)$$

La figura 4.27 mostra i risultati del calcolo effettuato da Isaacson et al. (1958) utilizzando un passo temporale pari a 9 minuti. Le condizioni al contorno in questo caso erano date dalla conoscenza della portata come funzione del tempo nelle sezioni di estremità.

Schemi impliciti

I limiti degli schemi espliciti possono essere superati facendo ricorso, come già visto in precedenza, a schemi *impliciti*. Questi ultimi richiedono naturalmente uno sforzo numerico superiore perché comportano la soluzione simultanea di un sistema di equazioni algebriche, in generale non lineari, formato da coppie di equazioni alle differenze finite (equazione del moto e di continuità) per ciascuna cella del reticolo computazionale e dalle due equazioni

che esprimono le condizioni al contorno, che sono in tal caso parte integrante del sistema implicito.

Numerosi sono gli schemi proposti in letteratura e fatti oggetto di programmi di largo uso nel calcolo del moto vario di correnti a pelo libero. Alcuni sono illustrati nella figura 4.28. Tali schemi consistono di fatto in una generalizzazione dello schema implicito (4.3.42) applicato alle equazioni complete. Lo schema 'rettangolo' (Amein, 1968)¹⁷, Baltzer e Lai, 1968¹⁸) si ricava ponendo $\alpha = 1$ per cui i valori nel nodo j scompaiono dalle equazioni alle differenze. Lo schema 'wide-flange' si ottiene ponendo $\alpha = 0$ (Leendertse, 1967¹⁹, Abbott e Ionescu, 1967²⁰, Vreugdenhil, 1972²¹). Assai frequente in tal caso è l'utilizzo di un procedimento risolutivo alternato nel quale l'equazione del moto e di continuità sono applicate su nodi diversi sfalsati di Δx l'uno rispetto all'altro (ovvero attraverso una combinazione dello schema 'rettangolo' e 'wide-flange'). Lo schema 'T' si ottiene ponendo $\alpha = 0$ e $\theta = 1$ (Vasiliev et al., 1965²², Liggett e Cunge, 1975²³). Per tale schema, così come per il precedente, le condizioni al contorno si esprimono attraverso rapporti incrementali spaziali in avanti (o all'indietro): in tal caso la precisione dello schema è controllata dalle condizioni al contorno.

Lo *schema a cella* ('box'), introdotto da Preissmann (1961)²⁴ e Preissmann e Cunge (1961)²⁵, è quello usato più estesamente nel calcolo delle onde di piena. È uno *schema centrato*, a maglia rettangolare (quattro punti), nel quale le derivate temporali e spaziali sono valutate come media pesata (rispettivamente nello spazio e nel tempo) di rapporti incrementali valutati fra nodi adiacenti lungo il perimetro della maglia. Introdotti coefficienti di peso temporale θ e spaziale ψ , con $0 \leq \theta \leq 1$ e $0 \leq \psi \leq 1$, segue per la generica variabile dipendente F (vedi figura 4.29)

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left[(1 - \psi)(F_j^{k+1} - F_j^k) + \psi(F_{j+1}^{k+1} - F_{j+1}^k) \right] \frac{1}{\Delta t} \quad (4.3.86a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left[(1 - \theta)(F_{j+1}^k - F_j^k) + \theta(F_{j+1}^{k+1} - F_j^{k+1}) \right] \frac{1}{\Delta x} \quad (4.3.86b)$$

¹⁷Amein M. (1968) Water Resour. Res., 4(4).

¹⁸Baltzer R.A., Lai C. (1968) J. Hydraul. Div. ASCE, 94 (HY4).

¹⁹Leendertse J.J. (1967) RM-5294-PR, Rand. Corp., Sta. Monica, California.

²⁰Abbott M.B., Ionescu F. (1967) J. Hydraulic. Res., 5(2).

²¹Vreugdenhil C.B. (1972) DHL, Res. Reports 89-IV.

²²Vasiliev O.F. et al. (1965) Izv. Akad. Nauk. SSSR Mechanics, 2.

²³Liggett J.A., Cunge J.A. (1975) in Unsteady Flow in Open Channels (Mahmood & Yevjevich, eds.), Water Res. Publication, Littleton, Colorado.

²⁴Preissmann A. (1961) 1st Congres de l'Assoc. Francaise de Calcul, Grenoble.

²⁵Preissmann A., Cunge J.A. (1961). Proc. 9th IAHR Congr., Dubrovnik.

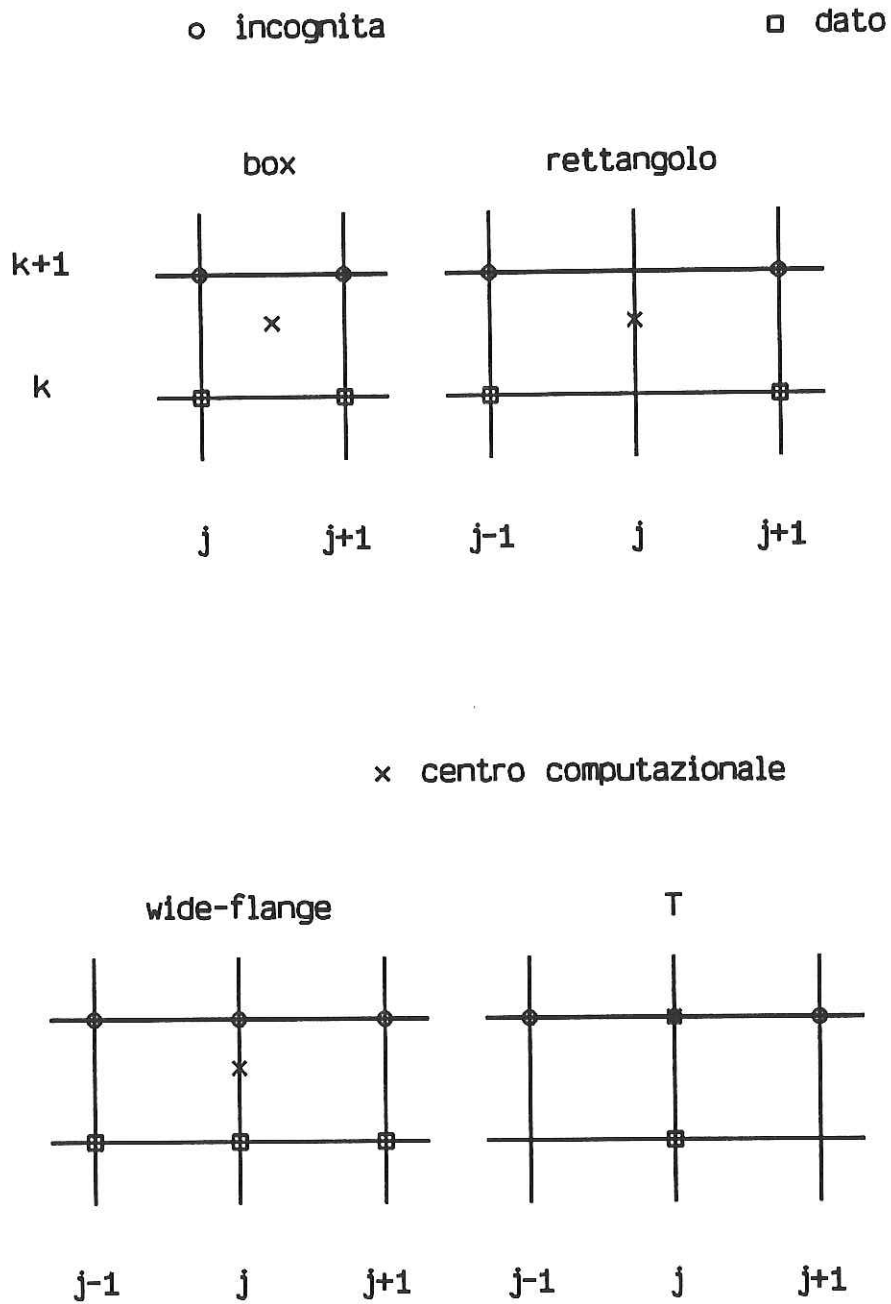


Figura 4.28: Schemi alle differenze finite di tipo implicito.

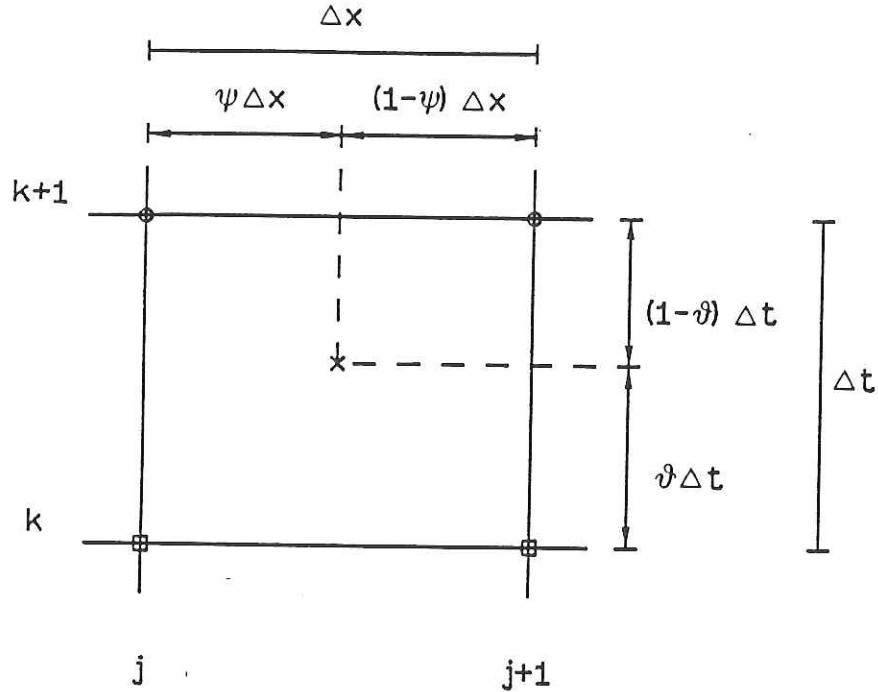


Figura 4.29: Schema 'box'.

Il vantaggio principale di tale schema è la sua struttura computazionale relativamente semplice e direttamente utilizzabile nel caso di intervallo spaziale Δx non costante (alvei naturali). Normalmente si pone $\psi = 0.5$, mentre il coefficiente di peso temporale θ risulta compreso fra 0.5 e 1 per ragioni di stabilità (come illustrato più avanti). Il centro computazionale della cella risulta dunque centrato spazialmente e decentrato nel tempo verso il livello temporale $k + 1$.

Sostituendo le (4.3.86a,b) nelle (4.3.1a,b), con $\psi = 0.5$ e assumendo passo spaziale variabile, si ottiene:

$$\frac{1}{2\Delta t} (S_1)_{j+1/2}^{k+\theta} (h_j^{k+1} - h_j^k + h_{j+1}^{k+1} - h_{j+1}^k) + \frac{1}{\Delta x_j} [(1-\theta)(Q_{j+1}^k - Q_j^k) + \theta(Q_{j+1}^{k+1} - Q_j^{k+1})] = 0 \quad (4.3.87a)$$

$$\frac{1}{2\Delta t} (Q_j^{k+1} - Q_j^k + Q_{j+1}^{k+1} - Q_{j+1}^k) + \frac{2}{\Delta x_j} (S_2)_{j+1/2}^{k+\theta} [(1-\theta)(Q_{j+1}^k - Q_j^k) + \theta(Q_{j+1}^{k+1} - Q_j^{k+1})] +$$

$$\frac{(S_3)_{j+1/2}^{k+\theta}}{\Delta x_j} \left[(1-\theta)(h_{j+1}^k - h_j^k) + \theta(h_{j+1}^{k+1} - h_j^{k+1}) \right] + (S_4)_{j+1/2}^{k+\theta} (\Omega_{,x} |h)_{j+1/2}^{k+\theta} + (S_5)_{j+1/2}^{k+\theta} = 0 \quad (4.3.87b)$$

avendo definito

$$S_1 = b \quad S_2 = \beta \frac{Q}{\Omega}$$

$$S_3 = g\Omega - b\beta \frac{Q^2}{\Omega^2} \quad S_4 = -\beta \frac{Q^2}{\Omega^2} \quad S_5 = \frac{Q|Q|}{\Omega C^2 R_i} \quad (4.3.88a, e)$$

I termini non differenziali si valutano come media pesata fra i quattro punti nodali che delimitano la cella

$$(S_i)_{j+1/2}^{k+\theta} = \frac{1}{2} \left\{ (1-\theta) \left[(S_i)_j^k + (S_i)_{j+1}^k \right] + \theta \left[(S_i)_j^{k+1} + (S_i)_{j+1}^{k+1} \right] \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (4.3.89)$$

Il termine $\Omega_{,x} |h$ si valuta attraverso la relazione

$$(\Omega_{,x} |h)_{j+1/2}^{k+\theta} = \frac{1}{\Delta x_j} \left[(1-\theta)(\Omega_{j+1} - \Omega_j)_{h_{j+1/2}^k} + \theta(\Omega_{j+1} - \Omega_j)_{h_{j+1/2}^{k+1}} \right] \quad (4.3.90)$$

Se $j = 0, 1, 2, \dots, N$ una coppia di equazioni del tipo (4.3.87a,b) può essere scritta per ciascuna delle N celle. Le due restanti equazioni necessarie per la determinazione delle $2(N+1)$ incognite al nuovo livello temporale $(N+1)$ essendo N il numero dei nodi del reticolo lungo x sono fornite dalle condizioni al contorno.

Due sono le tecniche più frequentemente usate per la soluzione del sistema di equazioni algebriche non lineari risultante dallo schema implicito. La prima consiste nell'applicazione del metodo 'double-sweep' già descritto nel caso del modello parabolico. Il metodo si applica al caso subcritico. A ogni passo temporale la soluzione richiede la preventiva linearizzazione del sistema (4.3.87a,b), ottenuta ponendo $\theta = 0$ nelle (4.3.89) e (4.3.90). Si noti che il termine che quantifica le resistenze d'attrito viene spesso trattato in maniera parzialmente implicita ponendo:

$$(S_5)_{j+1/2}^{k+\theta} = \left(\frac{|Q|}{\Omega C^2 R_i} \right)_{j+1/2}^k \frac{1}{2} \left[(1-\theta)(Q_j^k + Q_{j+1}^k) + \theta(Q_j^{k+1} + Q_{j+1}^{k+1}) \right] \quad (4.3.91)$$

Il sistema (4.3.87) può dunque scriversi nella forma

$$A_j Q_{j+1} + B_j Q_j + C_j h_{j+1} + D_j h_j = E_j \quad (4.3.92a)$$

$$A_j^* Q_{j+1} + B_j^* Q_j + C_j^* h_{j+1} + D_j^* h_j = E_j^* \quad (4.3.92b)$$

dove si è omesso per semplicità l'indice $k + 1$ e $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Posto

$$Q_j = G_j h_j + F_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (4.3.93)$$

dalle (4.3.92a,b) si ricavano, dopo alcuni passaggi, le relazioni

$$G_{j+1} = \frac{Z_j C_j^* - Z_j^* C_j}{Z_j^* A_j - Z_j A_j^*} \quad F_{j+1} = \frac{Z_j R_j - Z_j R_j^*}{Z_j^* A_j - Z_j A_j^*} \quad (4.3.94a, b)$$

$$h_j = L_j Q_{j+1} + M_j h_{j+1} + P_j \quad (4.3.95)$$

con

$$\begin{aligned} Z_j &= B_j G_j + D_j & Z_j^* &= B_j^* G_j + D_j^* \\ R_j &= E_j - B_j F_j & R_j^* &= E_j^* - B_j^* F_j \end{aligned}$$

$$L_j = -\frac{A_j}{Z_j} \quad M_j = -\frac{C_j}{Z_j} \quad P_j = \frac{R_j}{Z_j} \quad (4.3.96a, g)$$

Le (4.3.93) e (4.3.95) forniscono evidentemente due relazioni che possono essere applicate ricorsivamente (da valle) per la determinazione della soluzione noti i valori dei coefficienti $G_j, F_j (j = 0, 1, 2, \dots, N)$ e $L_j, M_j, P_j (j = 0, 1, 2, \dots, N - 1)$. Posto che la condizione al contorno di monte sia espressa nella forma $Q_o = Q(t)$, cioè sia assegnato l'andamento della portata nel tempo nella sezione di monte, il metodo 'double-sweep' procede secondo il seguente schema:

- i) Imposizione della condizione di monte: dalla (4.3.93) segue

$$G_o = 0 \quad F_o = Q(t) \quad (4.3.97a, b)$$

con $t = t_o + (k + 1)\Delta t$, cioè con il valore relativo al livello temporale in esame.

- ii) Prima sequenza ricorsiva, da monte verso valle, con calcolo dei coefficienti $G_j, F_j (j = 1, 2, \dots, N)$ attraverso le (4.3.94a,b) e dei coefficienti $L_j, M_j, P_j (j = 0, 1, \dots, N - 1)$ attraverso le (4.3.96e,g).
- iii) Imposizione della condizione di valle: il sistema costituito dalla condizione al contorno di valle (eventualmente linearizzata) e dalla (4.3.93) particolarizzata per $j = N$ (in cui G_N e F_N sono noti) consente la determinazione delle due incognite h_N e Q_N .

- iv) Seconda sequenza ricorsiva, da valle verso monte (j variabile da $N - 1$ a 0), attraverso la quale si calcola la soluzione per h_j e Q_j nota la soluzione nel nodo successivo ($j + 1$) applicando alternativamente la (4.3.95) per valutare h_j e la (4.3.96) per valutare Q_j .

Lo schema risolutivo è perfettamente analogo se la condizione al contorno di monte è espressa in termini di h , cioè nella forma $h_o = h(t)$. È sufficiente sostituire h con Q e viceversa in tutte le espressioni precedenti per ottenere un procedimento risolutivo idoneo in tal caso.

Ottenuta in tal modo una prima soluzione di tentativo per h_j^{k+1} e Q_j^{k+1} si procede valutando una soluzione di secondo tentativo, determinando i coefficienti attraverso la (4.3.89) e (4.3.90) con $\theta \neq 0$ sulla base della soluzione di primo tentativo, ed eventualmente iterando il procedimento.

Si noti che nel caso supercritico una sola sequenza ricorsiva è sufficiente, da monte verso valle, per calcolare la soluzione del sistema linearizzato. Le due condizioni al contorno nella sezione di monte forniscono infatti direttamente Q_o e h_o . Quindi le (4.3.92a,b) possono essere usate ricorsivamente con j variabile da 0 a $N - 1$ per valutare la soluzione nel nodo $j + 1$ nota la soluzione nel nodo precedente.

Una seconda tecnica risolutiva del sistema di equazioni algebriche risultante nel caso implicito consiste nella soluzione diretta del sistema non lineare attraverso il *metodo iterativo di Newton*. Scritte le equazioni (4.3.87a,b) nella forma

$$F_j(h_j, h_{j+1}, Q_j, Q_{j+1}) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, N - 1) \quad (4.3.98a)$$

$$G_j(h_j, h_{j+1}, Q_j, Q_{j+1}) = 0 \quad (4.3.98b)$$

e le condizioni al contorno nella forma

$$E_j(h_j, Q_j) = 0 \quad (j = 0, j = N) \quad (4.3.98c)$$

(dove si è ommesso per semplicità l'indice $k + 1$) si assegnano valori di tentativo (I) alle incognite h e Q (per esempio valori pari a quelli del livello temporale noto).

Sostituendo tali valori di primo tentativo nelle (4.3.98) si ottiene:

$$F_j(h_j^I, h_{j+1}^I, Q_j^I, Q_{j+1}^I) = R_{F_j^I} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N - 1) \quad (4.3.99a)$$

$$G_j(h_j^I, h_{j+1}^I, Q_j^I, Q_{j+1}^I) = R_{G_j^I} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N - 1) \quad (4.3.99b)$$

$$E_j(h_j^I, Q_j^I) = R_{E_j^I} \quad (j = 0, j = N) \quad (4.3.99c)$$

Si procede quindi alla seconda iterazione ponendo

$$h_j^{II} = h_j^I + \Delta h_j \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (4.3.100a)$$

$$Q_j^{II} = Q_j^I + \Delta Q_j \quad (4.3.100b)$$

dove gli incrementi Δh_j e ΔQ_j sono soluzione del sistema lineare

$$\left(\frac{\partial F_j}{\partial h_j}\right)^I \Delta h_j + \left(\frac{\partial F_j}{\partial h_{j+1}}\right)^I \Delta h_{j+1} + \left(\frac{\partial F_j}{\partial Q_j}\right)^I \Delta Q_j + \left(\frac{\partial F_j}{\partial Q_{j+1}}\right)^I \Delta Q_{j+1} = -R_{F_j^I} \quad (4.3.101a)$$

$(j = 0, 1, 2, \dots, N-1)$

$$\left(\frac{\partial G_j}{\partial h_j}\right)^I \Delta h_j + \left(\frac{\partial G_j}{\partial h_{j+1}}\right)^I \Delta h_{j+1} + \left(\frac{\partial G_j}{\partial Q_j}\right)^I \Delta Q_j + \left(\frac{\partial G_j}{\partial Q_{j+1}}\right)^I \Delta Q_{j+1} = -R_{G_j^I} \quad (4.3.101b)$$

$$\left(\frac{\partial E_j}{\partial h_j}\right)^I \Delta h_j + \left(\frac{\partial G_j}{\partial Q_j}\right)^I \Delta Q_j = -R_{E_j^I} \quad (j = 0, j = N) \quad (4.3.101c)$$

Il procedimento è ripetuto finché i residui R_F , R_G e R_E non risultano soddisfare una prefissata tolleranza.

La *congruenza* degli schemi (4.3.83a,b) e (4.3.87a,b) si dimostra come nei casi precedenti. Si pone tuttavia una questione ulteriore che risulta di qualche interesse. Nelle condizioni per cui lecita l'approssimazione parabolica (termini inerziali trascurabili) il sistema completo deve tendere al comportamento del modello parabolico-diffusivo. I procedimenti numerici illustrati rispettano tale condizione ma danno luogo a un effetto di attenuazione dell'onda numerica che si aggiunge a quello fisico: tale effetto, denominato *diffusione numerica*, comporta dunque una riduzione della precisione dello schema numerico.

Utilizzando lo schema esplicito, trascurando i termini inerziali e assumendo la costanza dei coefficienti, si dimostra che l'effetto della diffusione numerica risulta trascurabile se

$$\left[\alpha - \left(c' \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right] \ll 2D' \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (4.3.102)$$

La condizione (4.3.103) costituisce una condizione contrastante con quella che, come vedremo, è imposta dal requisito della stabilità. Nel caso implicito, trascurando i termini inerziali, lo schema numerico si traduce, a meno di termini di ordine superiore, nella relazione

$$Y_{,t} + c' Y_{,x} - D_e Y_{,xx} = 0 \quad (4.3.103)$$

dove il coefficiente di diffusione efficace D_e esibito dallo schema numerico nelle condizioni limite vale

$$D_e = D' + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) c'^2 \Delta t \quad (4.3.104)$$

Dunque per $\theta = 0.5$ lo schema implicito non dà luogo a diffusione numerica.

L'analisi della *stabilità* degli schemi numerici per le equazioni complete si esegue utilizzando il procedimento descritto in precedenza. Nel caso dello schema esplicito (linearizzato) la stabilità impone

$$\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \leq \alpha \leq 1 \quad c = |c_{\pm}| \quad (4.3.105)$$

La condizione (4.3.106) si riduce al criterio di Courant-Friedrichs-Lewy se $\alpha = 1$ (schema diffusivo). Si noti ancora che per $\alpha = 0$ lo schema esplicito risulta incondizionatamente instabile. Combinando la (4.3.106) con la (4.3.103) e ricordando che $c' \ll c$ segue la condizione

$$\alpha \ll 2D' \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (4.3.106)$$

cioè, dalla (4.3.106),

$$\Delta t \ll 2 \frac{D'}{c^2} \quad (4.3.107)$$

che impone una condizione sul passo temporale assai restrittiva. Nel caso degli schemi impliciti l'analisi di stabilità conduce a condizioni sufficienti per le stabilità analoghe a quelle ottenute nel caso diffusivo:

$$\theta \geq 0.5 \quad \alpha \geq 0 \quad (4.3.108 a, b)$$

L'adozione di un modello implicito risulta dunque assai meno problematica dal punto di vista della stabilità. Si noti che tale criterio è valido nel caso lineare (coefficienti costanti) e nell'ipotesi di trascurabilità del termine d'attrito.

La questione legata al ruolo delle resistenze sulla stabilità del procedimento numerico è assai controversa e sembra dipendere dal tipo di schematizzazione adottata: nel caso dello schema 'leap-frog' o della schema STI è stato mostrato, da Perkins (1968)²⁶ e da Wylie (1970)²⁷ rispettivamente,

²⁶Perkins F.E. (1968) ASCE Natl. Meeting on Envir. Eng., Chattanooga, Tennessee.

²⁷Wylie E.B. (1970) J. Hydraul. Div. ASCE, 96 (HY11).

che il ruolo dell'attrito comporta una riduzione del limite della condizione di Courant; in altri casi il ruolo delle resistenze d'attrito sembra comportare un incremento della stabilità dello schema.

In pratica, come menzionato nel caso dello schema 'box', è opportuno adottare per la soluzione delle equazioni complete non lineari un valore di θ appena superiore a 0.5 (Fread (1974)²⁸ $\theta = 0.55$; Chaundry e Contractor (1973)²⁹ $\theta = 0.6$), introducendo quindi necessariamente un effetto di diffusione numerica come previsto dalla relazione (4.3.105).

Si pone infine il problema della valutazione della *precisione* dello schema numerico. Indicazioni sul grado e sulla modalità dello scostamento dei risultati numerici dai valori corretti possono essere ottenute attraverso diagrammi che riportano l'andamento dell'ampiezza e della fase della soluzione numerica in funzione del numero di punti computazionali utilizzati (numero di passi nella direzione x). Ricordando la relazione (4.3.20), il grado di attenuazione (o amplificazione) della soluzione a ogni passo temporale dipende dal valore del coefficiente di amplificazione ρ mentre la celerità numerica è controllata dal valore della fase δ . Definiti due *coefficienti di convergenza* nella forma

$$R_a = \frac{\rho}{\rho_o} \qquad R_P = \frac{\delta}{\delta_o} \qquad (4.3.109a, b)$$

come rapporto fra l'amplificazione e la fase numeriche e le corrispondenti quantità ρ_o e δ_o relative alla soluzione esatta, la precisione della soluzione numerica si analizza valutando l'andamento di tali coefficienti in funzione dei parametri dello schema numerico.

Nel caso dello schema 'box' si ottengono, in funzione della quantità $N = L/\Delta x$ (con L lunghezza d'onda), diagrammi del tipo riportato nelle figure 4.30a,c (Basco, 1977)³⁰ al variare del numero di Courant ($C_r = c\Delta t/\Delta x$) e del coefficiente di peso temporale θ . Nelle figure 4.30a,b si ha $\theta = 1$. Dunque lo schema introduce sempre diffusione numerica, cioè attenuazione 'artificiale' rispetto alla soluzione analitica ($R_a < 1$). La diffusione numerica aumenta, cioè la precisione dello schema degrada, al crescere del numero di Courant e al diminuire del numero di punti computazionali. La celerità numerica decresce al crescere del numero di Courant e coincide con quella analitica per $C_r=0.5$ ovvero, asintoticamente, al crescere del numero di punti. Nella

²⁸Fread D.L. (1974) NOAA Tech. Memo. US National Weather Service, Silver Spring.

²⁹Chaundry Y.M., Contractor D.N. (1973) Water Resour. Res., 9(6).

³⁰Basco D.R. (1977) Proc. Ann. Hydraul. Spec. Conf. ASCE 25th, College Station, Texas.

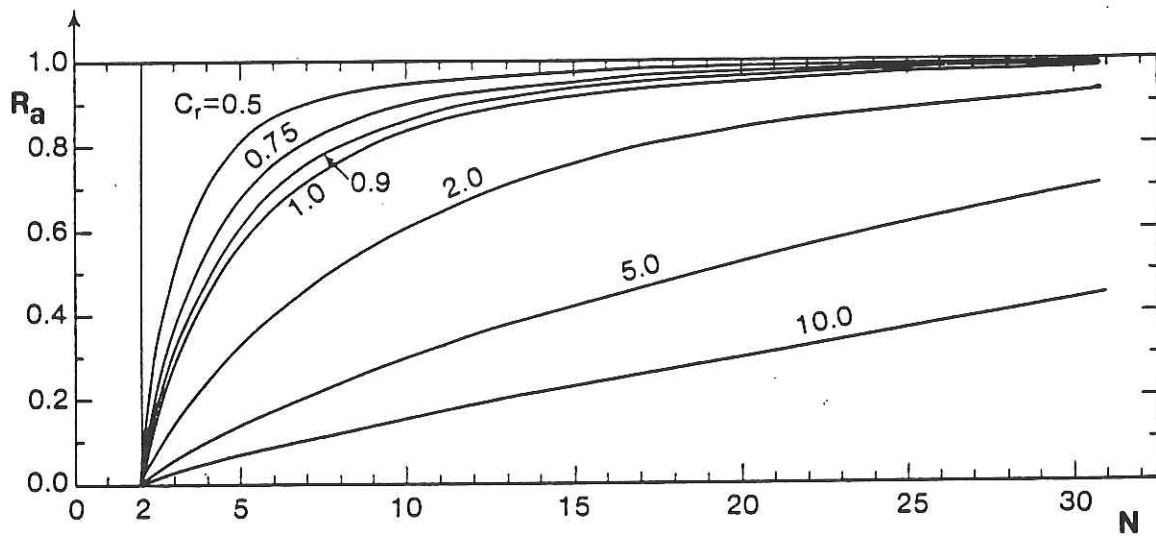


Figura 4.30: a - Schema 'box': andamento del coefficiente di convergenza R_a in funzione del numero di intervalli computazionali N per diversi valori del numero di Courant: Nr. di Froude = 0, $\theta = 1.0$.

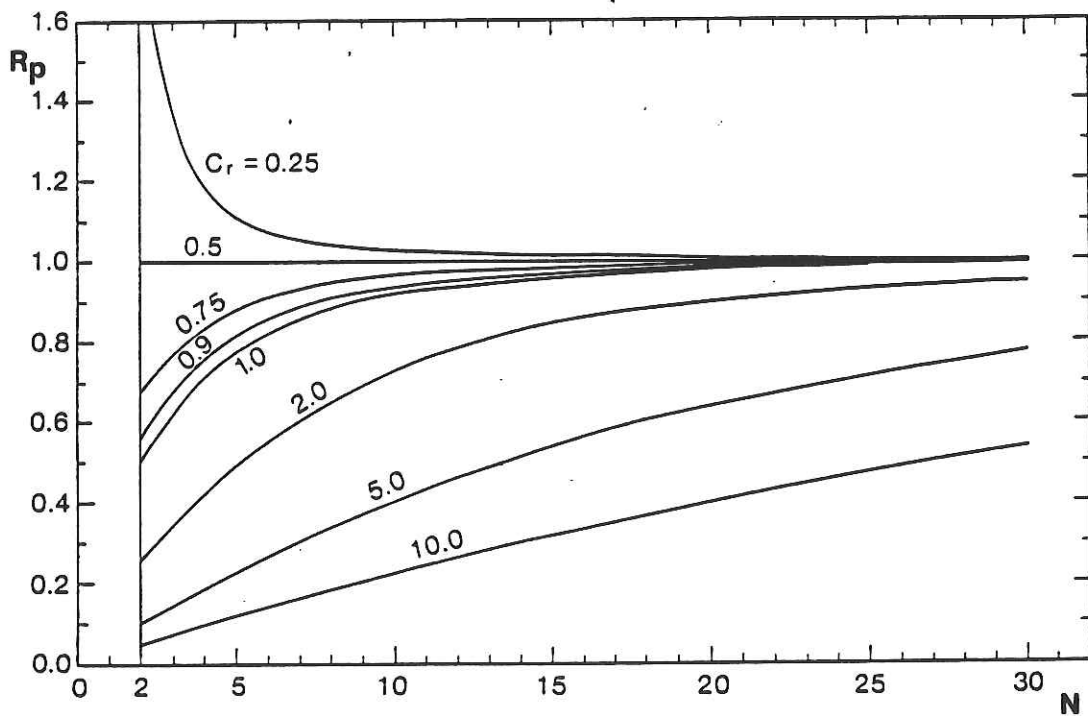


Figura 4.30: b - Schema 'box' andamento del coefficiente di convergenza R_p in funzione del numero di intervalli computazionali N per diversi valori del numero di Courant: Nr. di Froude = 0, $\theta = 1.0$.

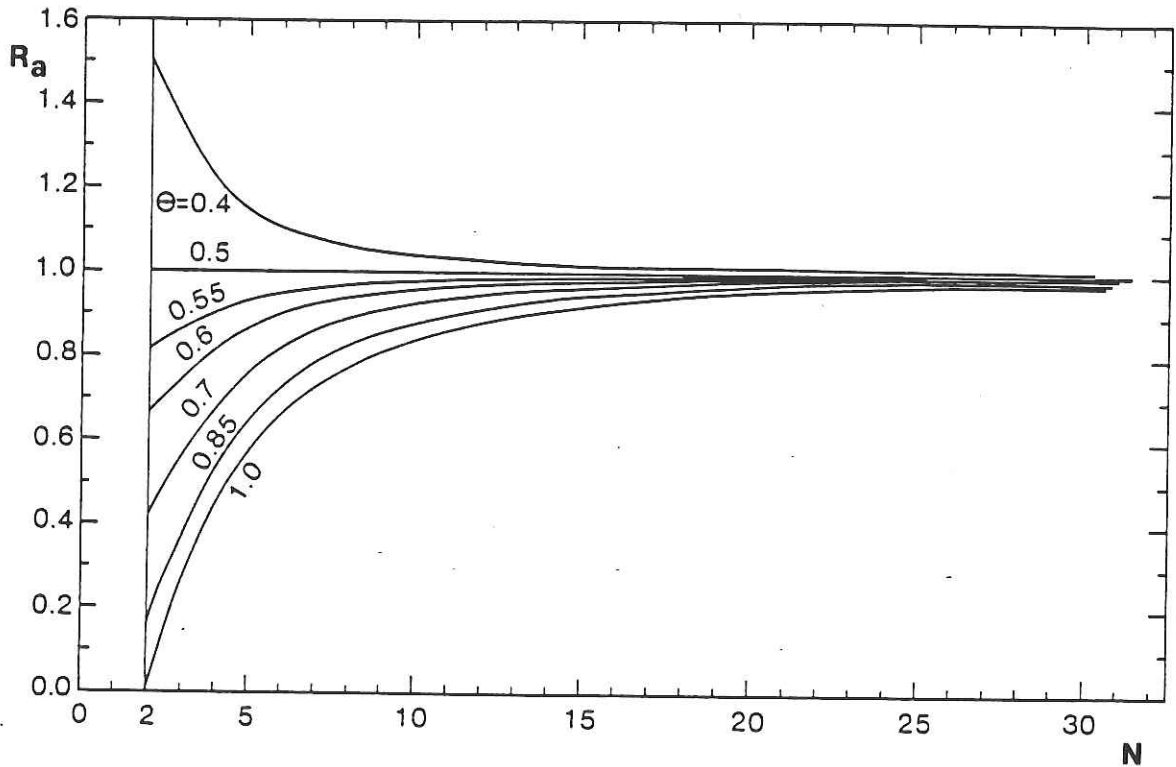


Figura 4.30: c - Schema 'box' andamento del coefficiente di convergenza R_a in funzione del numero di intervalli computazionali N per diversi valori del coefficiente di peso temporale θ : Nr. di Froude = 0, $C_r = 1.0$.

figura 4.30c è illustrata la dipendenza di R_a dal coefficiente di peso θ (con $C_r = 1$). Lo schema numerico produce attenuazione o amplificazione rispetto alla soluzione analitica a seconda che θ risulti maggiore o minore di 0.5 in accordo con il criterio di stabilità (4.3.109a). Si noti che tali figure sono ricavate nel caso lineare.

Analoghi risultati sono stati ottenuti da Leendertse (1967) che ha esaminato il comportamento dello schema implicito, con $\alpha = 0$ e nel caso in cui i termini convettivi risultano trascurabili, paragonandolo a quello del modello parabolico. La figura 4.31 mostra che in tali condizioni il modello parabolico, che comporta un lavoro numerico minore, presenta una precisione numerica maggiore. Ovviamente nel caso in cui l'inerzia gioca un ruolo importante occorre far ricorso al sistema completo.

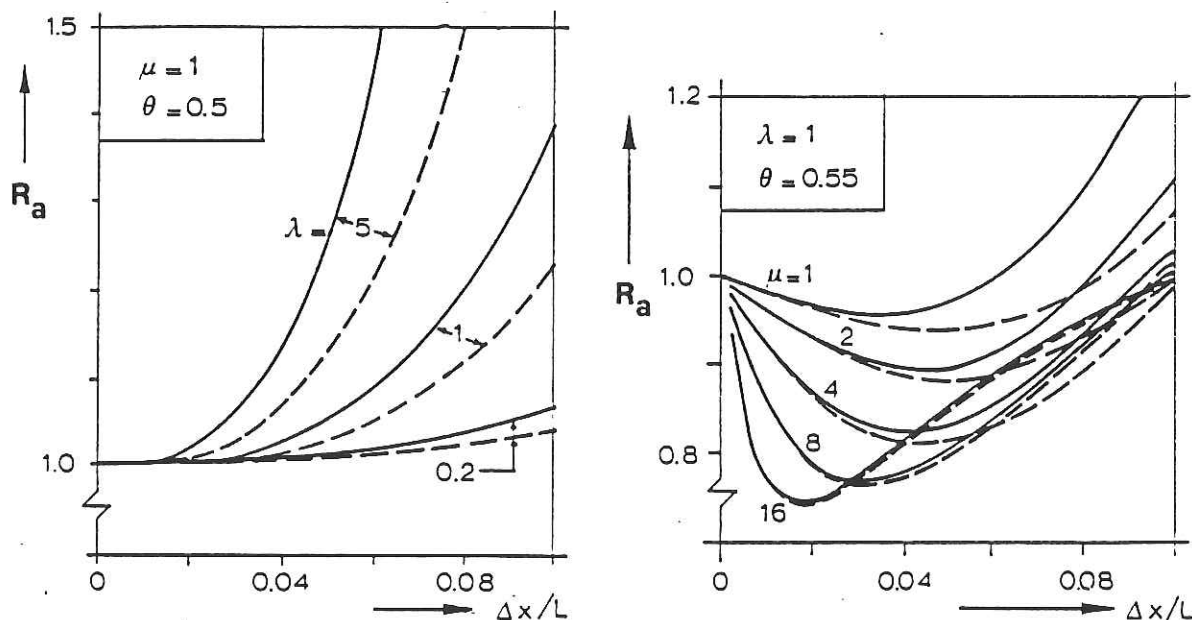


Figura 4.31: Schema 'wide-flange': andamento del coefficiente di convergenza R_a in funzione del passo spaziale per il modello completo (curve intere) e per il modello parabolico (curve tratteggiate): $\lambda = 2D'\Delta t/\Delta x^2$; $\mu = c'\Delta t/\Delta x$; Nr. di Froude = 0.

4.4 Onde progressive stabili

a Analisi generale e individuazione delle condizioni per la presenza di un fronte frangente

La possibilità di un irripidimento dell'onda fino al raggiungimento delle condizioni di frangimento è emersa nell'ambito del modello cinematico. Peraltro mentre tale fenomeno non si manifesta nel caso delle onde di piena in cui il picco dell'onda può svolgersi nell'arco di decine di chilometri, la possibilità di un frangimento e della successiva propagazione di un risalto è reale nel caso di manovre eseguite rapidamente e localmente in canali con immissioni di portata o per effetto di una chiusura totale o parziale di paratoie. Ciò può verificarsi, per esempio, durante manovre operate nelle conche di navigazione o in centrali idroelettriche. In tal caso se l'altezza dell'onda è grande rispetto alla profondità della corrente lo studio della propagazione col metodo delle caratteristiche rivela la tendenza all'irripidimento già emersa nell'ambito del modello cinematico. Nel corso dell'evoluzione l'irripidimento può condur-

re ad una forma stabile dell'onda o può indurre frangimento interpretabile attraverso l'inserimento di una *discontinuità traslante con una sua velocità* a .

Al fine di chiarire le condizioni in cui si realizzano i due diversi tipi di evoluzione, ricerchiamo *soluzioni stazionarie* delle equazioni del moto rispetto a un osservatore in moto con velocità a . Assumiamo dunque

$$Y = Y(X) \quad U = U(X) \quad X = x - at \quad (4.4.1a, c)$$

e sostituiamo tale posizione nelle (4.1.1), (4.1.2). L'equazione di continuità, essendo

$$\frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{d}{dX} \quad \frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -a \frac{d}{dX} \quad (4.4.2a, b)$$

si integra direttamente nella forma

$$\Omega(U - a) = \text{cost.} \quad (4.4.3a)$$

o, per sezioni rettangolari,

$$Y(U - a) = K = \text{cost.} \quad (4.4.3b)$$

Analogamente la (4.1.2) diventa, per sezioni rettangolari larghe,

$$(U - a) \frac{dU}{dX} + g \frac{dY}{dX} = g i_f \frac{U^2}{C^2 Y} \quad (4.4.4)$$

Eliminando U e $U_{,x}$ fra le due relazioni precedenti si ottiene l'equazione del profilo $Y(X)$ nella forma:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{g i_f C^2 Y^3 - (K + aY)^2}{C^2 (gY^3 - K^2)} \quad (4.4.5)$$

Tale equazione va risolta con opportune condizioni al contorno. Assumiamo la soluzione uniforme per $X \rightarrow \infty$ (vedi figura 4.32) e poniamo $C = \text{costante}$ per semplicità. Si ha

$$\frac{U_1^2}{C^2 Y_1} - g i_f = \frac{U_2^2}{C^2 Y_2} - g i_f = 0 \quad (4.4.6a)$$

$$Y_1(U_1 - a) = Y_2(U_2 - a) = K \quad (4.4.6b)$$

donde, esprimendo tutte le quantità in funzione delle sole Y_1 e Y_2 ,

$$U_1^2 = C^2 g i_f Y_1 \quad U_2^2 = C^2 g i_f Y_2 \quad (4.4.7a, b)$$

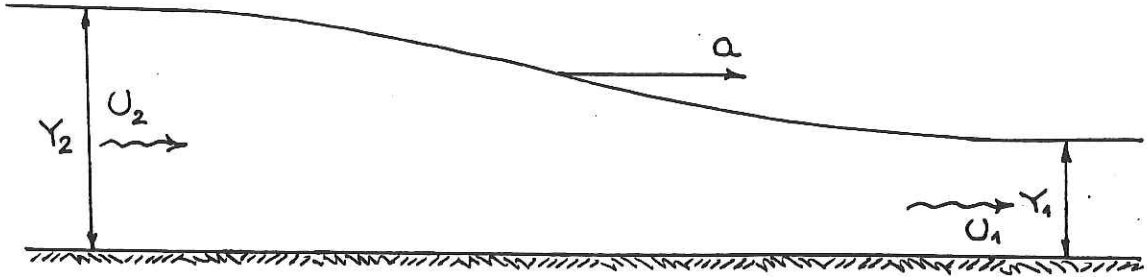


Figura 4.32:

$$K = Y_1 U_1 - Y_1 \frac{U_2 Y_2 - U_1 Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{U_1 - U_2}{Y_2 - Y_1} Y_1 Y_2 = -\sqrt{g i_f} C \frac{Y_1 Y_2}{\sqrt{Y_1} + \sqrt{Y_2}} \quad (4.4.8)$$

$$a = \frac{U_2 Y_2 - U_1 Y_1}{Y_2 - Y_1} = \sqrt{g i_f} C \frac{Y_2^{3/2} - Y_1^{3/2}}{Y_2 - Y_1} \quad (4.4.9)$$

Si noti che $Y = Y_1$ e $Y = Y_2$ annullano il numeratore della (4.4.5). La terza radice si ricava uguagliando i termini noti della identità

$$g i_f C^2 Y^3 - (K + aY)^2 = g i_f C^2 (Y - Y_1)(Y - Y_2)(Y - Y_3) \quad (4.4.10)$$

cioè

$$Y_3 = \frac{K^2}{g i_f C^2 Y_1 Y_2} = \frac{Y_1 Y_2}{(Y_1^{1/2} + Y_2^{1/2})^2} \quad (4.4.11)$$

che si dimostra facilmente essere minore sia di Y_1 che di Y_2 . Dunque assegnate le condizioni al contorno Y_1 e Y_2 , cioè definito K , la terza radice del numeratore costituisce un valore di Y che non può essere assunto dalla soluzione.

Scriviamo dunque:

$$\frac{dY}{dX} = -i_f \frac{(Y_2 - Y)(Y - Y_1)(Y - Y_3)}{Y^3 - (K^2/g)} \quad (4.4.12)$$

Il comportamento della soluzione dipende quindi dal segno del denominatore.

Si noti a questo proposito che

$$gY^3 - K^2 = gY^3 - Y^2(U - a)^2 = Y^2[gY - (U - a)^2] \quad (4.4.13)$$

Dunque il denominatore è positivo per valori di a interni all'intervallo delle radici $(U - \sqrt{gY})$ e $(U + \sqrt{gY})$, cioè se

$$U - \sqrt{gY} < a < U + \sqrt{gY} \quad (4.4.14)$$

Si noti tuttavia che la seconda radice $(U - \sqrt{gY})$ è sempre minore di a , essendo K negativo (vedi la (4.4.8)) e quindi a maggiore di U per la (4.4.3).

Consideriamo allora separatamente i due casi.

b Onde deboli (non frangenti)

È questo il caso in cui $a < U + \sqrt{gY}$ e, quindi dY/dX risulta sempre negativo. L'assetto del profilo è quello in figura 4.32.

Si noti anzitutto che per onde di piccola ampiezza, cioè per $Y_1 \rightarrow Y_2$, la celerità a diventa pari a

$$a \rightarrow \frac{3}{2}C\sqrt{gY_1} = \frac{3}{2}U_1 \quad (4.4.15)$$

Tale risultato è facilmente ottenibile dalla (4.4.9) sviluppando Y_2 in serie di Taylor. Dunque, per onde di piccola ampiezza, la disuguaglianza che definisce questo caso assume la forma

$$\frac{3}{2}U_1 < U_1 + \sqrt{gY_1} \quad (4.4.16)$$

cioè

$$F_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gY_1}} < 2 \quad (4.4.17)$$

Il carattere *debole* dell'onda può essere evidenziato in generale (cioè per onde di ampiezza arbitraria) osservando che, utilizzando la (4.4.3), la disuguaglianza (4.4.14) può porsi nella forma

$$-\frac{K}{Y} < \sqrt{gY} \quad (4.4.18)$$

o, per la (4.4.8), ponendo $Y = Y_1$ (condizione più restrittiva) nella (4.4.18), segue:

$$\sqrt{gY_1}C \frac{Y_1 Y_2}{\sqrt{Y_1} + \sqrt{Y_2}} < Y_1 \sqrt{gY_1} \quad (4.4.19)$$

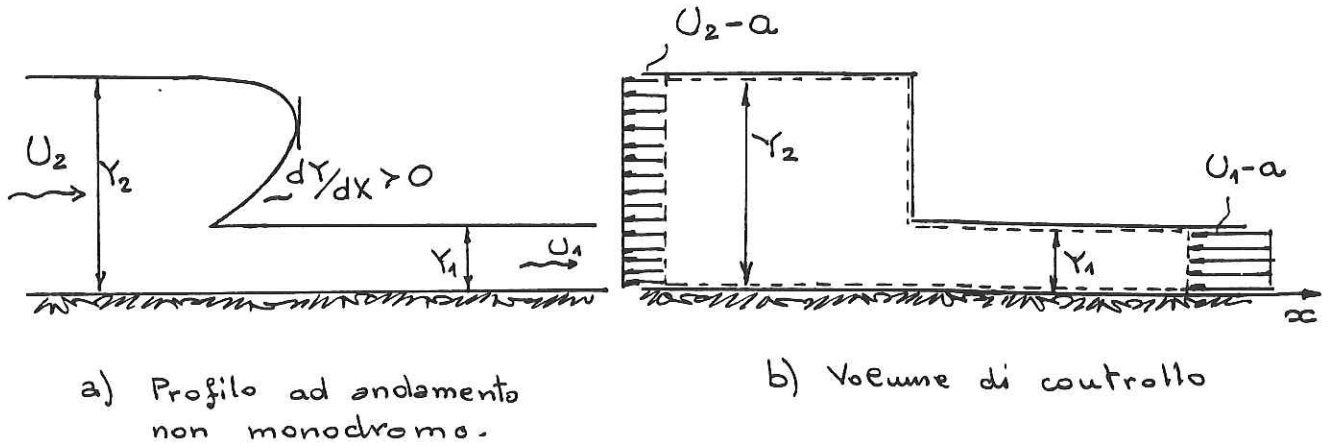


Figura 4.33:

donde

$$C\sqrt{i_f}\frac{Y_2}{Y_1} - \sqrt{\frac{Y_2}{Y_1}} - 1 < 0 \quad (4.4.20)$$

e quindi

$$1 < \left(\frac{Y_2}{Y_1}\right)^{1/2} < \frac{1 + \{+4C\sqrt{i_f}\}^{1/2}}{2C\sqrt{i_f}} \quad (4.4.21)$$

Il lettore potrà verificare che la (4.4.21) si riduce alla (4.4.17) nel caso di onde di piccola ampiezza.

c Onde frangenti

Il denominatore della (4.4.12) risulta negativo se si verifica la condizione $a > (U + \sqrt{gY})$. Consideriamo allora il caso in cui risulti

$$U_1 + \sqrt{gY_1} < a < U_2 + \sqrt{gY_2} \quad (4.4.22)$$

Quando si verifica tale condizione il denominatore della (4.2.12) cambia segno lungo il profilo e quest'ultimo inverte la sua direzione, diventa cioè non più 'a un sol valore'. Tale condizione viene eliminata inserendo opportunamente una *discontinuità* che rappresenta il *fronte d'onda frangente* (figura 4.33).

Le condizioni che devono essere soddisfatte in corrispondenza del fronte d'onda si ricavano assumendo il fenomeno stazionario rispetto a un riferimento che trasla con celerità a e imponendo la conservazione della massa e il

principio della quantità di moto rispetto allo stesso riferimento. Sempre nel caso di alveo a sezione rettangolare, e assumendo positiva la direzione 2-1 essendo $Y_1 < Y_2$, la continuità impone:

$$(U_1 - a)Y_1 = (U_2 - a)Y_2 \quad (4.4.23)$$

Poiché la (4.4.22) pone $(U_1 - a) < -\sqrt{gY_1} < 0$, la (4.4.23) implica che si abbia $(U_2 - a) < 0$: dunque, rispetto a un osservatore mobile con la perturbazione, il moto del fluido è sempre nel verso 1-2. Il principio della quantità di moto assume qui la forma

$$\frac{\rho g}{2} [Y_2^2 - Y_1^2] - \rho Y_1 (U_1 - a)^2 + \rho Y_2 (U_2 - a)^2 = 0 \quad (4.4.24)$$

avendo trascurato l'effetto delle tensioni tangenziali e della gravità. Segue:

$$\frac{g}{2} (Y_1^2 - Y_2^2) = (U_1 - a) \left[(U_2 - a) Y_2 \frac{Y_1}{Y_2} - (U_1 - a) Y_1 \right] = Y_1 (U_1 - a) (U_2 - U_1) \quad (4.4.25)$$

Ma, per la (4.4.23) si ha:

$$U_2 - U_1 = (U_1 - a) \frac{Y_1 - Y_2}{Y_2} \quad (4.4.26)$$

Dalle (4.4.25) e (4.4.26) segue

$$\frac{g}{2} (Y_1 + Y_2) = \frac{Y_1}{Y_2} (U_1 - a)^2 \quad (4.4.27)$$

e infine

$$a = U_1 + \sqrt{\frac{gY_2}{2Y_1} (Y_1 + Y_2)} \quad (4.4.28)$$

dove è stata esclusa la radice che condurrebbe a valori positivi di $(U_1 - a)$ esclusi dalla (4.4.22).

Indicata con $\eta (= Y_2 - Y_1)$ l'ampiezza d'onda e posto $(\eta/Y_1) \ll 1$, la (4.4.28) può risciversi nella forma

$$a - U_1 = \sqrt{gY_1 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{Y_1} + 0 \left(\frac{\eta}{Y_1} \right)^2 \right]} \quad (4.4.29)$$

Proponiamoci ora di determinare alcune conseguenze della condizione che il fronte sia frangente. La (4.4.28) pone

$$\frac{(U_1 - a)^2}{gY_1} = \frac{1}{2} \frac{Y_2}{Y_1} \left(1 + \frac{Y_2}{Y_1} \right) > 1 \quad (4.4.30)$$

Analogamente la (4.4.23), insieme alla (4.4.30), implica

$$\frac{(U_2 - a)^2}{gY_2} = \frac{1}{2} \frac{Y_1}{Y_2} \left(\frac{Y_1}{Y_2} + 1 \right) < 1 \quad (4.4.31)$$

Se ne deduce la seguente *condizione necessaria*:

- il moto relativo della corrente 1 rispetto al fronte deve essere supercritico;
- il moto relativo della corrente 2 rispetto al fronte deve essere subcritico.

Da ultimo osserviamo che la condizione per la formazione del fronte frangente quale emerge dalla (4.4.30) può essere confrontata con la limitazione sperimentale ottenuta per la formazione del *risalto diretto* in condizioni stazionarie. Nella situazione attuale deve sussistere la condizione

$$\frac{(U_1 - a)^2}{gY_1} \geq 3 \quad (4.4.32)$$

per il moto relativo. Usando l'espressione di a (4.4.28) segue infine

$$\frac{Y_2}{Y_1} \geq 2 \quad (4.4.33)$$

Esistono due possibili situazioni di *onde frangenti positive* (con a positiva, cioè diretta da Y_2 a Y_1):

- i) *onda positiva che si propaga verso valle* (figura 4.34).

È questo il caso in cui U_1 risulta positivo e a risulta anch'essa positiva, con $a > U_1$ e $a > U_2$. Tale caso può realizzarsi nel caso di piene violente in alvei torrentizi o di onde prodotte dal crollo di dighe.

- ii) *onda positiva che si propaga verso monte* (figura 4.35).

Tale caso, che corrisponde a $U_1 < 0$ e $a > 0$, è rilevante per la propagazione delle maree negli estuari. Famosa è la propagazione osservata sul fiume Chien Tang con un fronte che ha raggiunto un'altezza di 9 m su un corso d'acqua di quasi 2 Km di larghezza.

Il fenomeno si osserva anche nei canali di alimentazione di turbine idrauliche quando si hanno rapide riduzioni della potenza richiesta.

Accanto ai due casi precedenti, di onde positive, esistono casi di onde negative che tuttavia non sono stabili:

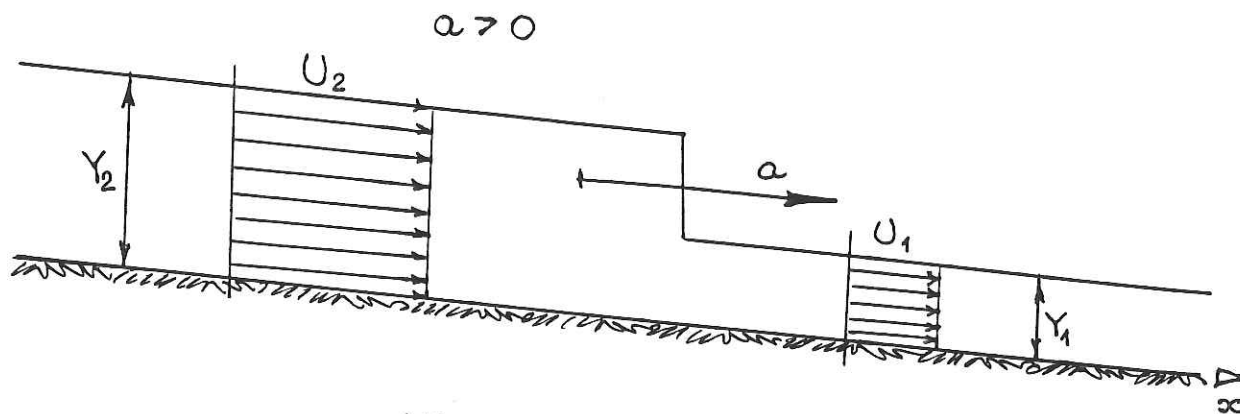


Figura 4.34: Onda positiva che si propaga verso valle.

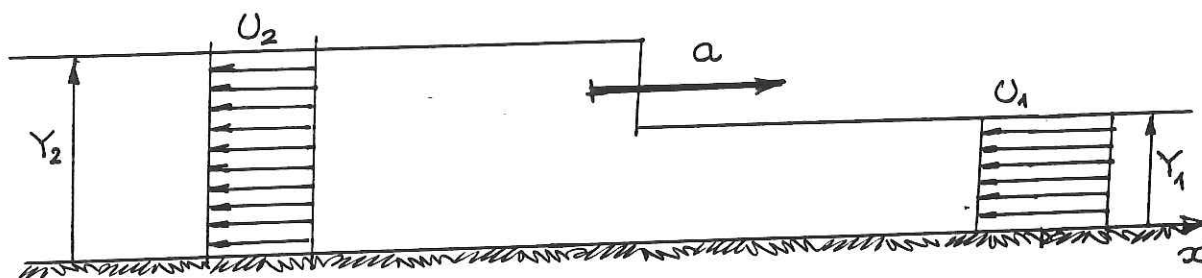


Figura 4.35: Onda positiva che si propaga verso monte.

iii) *onda negativa che si propaga verso valle*: ($U_1 < 0, a < 0$) (figura 4.36).

In questo caso il fronte tende ad appiattirsi nel corso della propagazione poiché la celerità locale cresce al crescere della quota. Onde di questo tipo si presentano in canali in cui si ha una brusca riduzione di portata da monte originata dalla chiusura di una paratoia o dalla riduzione della portata di alimentazione di una turbina.

iv) *onda negativa che si propaga verso monte*: ($U_1 > 0, a < 0$) (figura 4.37).

Anche in questo caso il fronte *non* è stabile per motivi analoghi al caso c). Onde di questo tipo si presentano nei canali di alimentazione di impianti idroelettrici per effetto di un aumento della portata richiesta all'estremità di valle del canale.

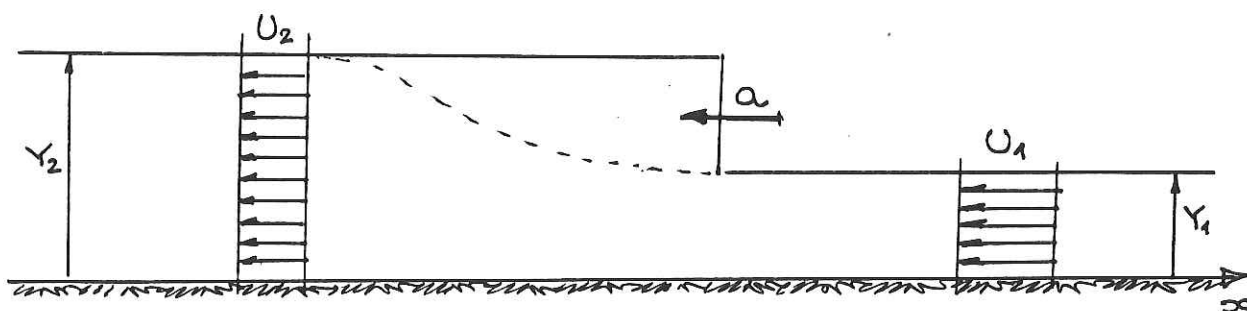


Figura 4.36: Onda negativa che si propaga verso valle.

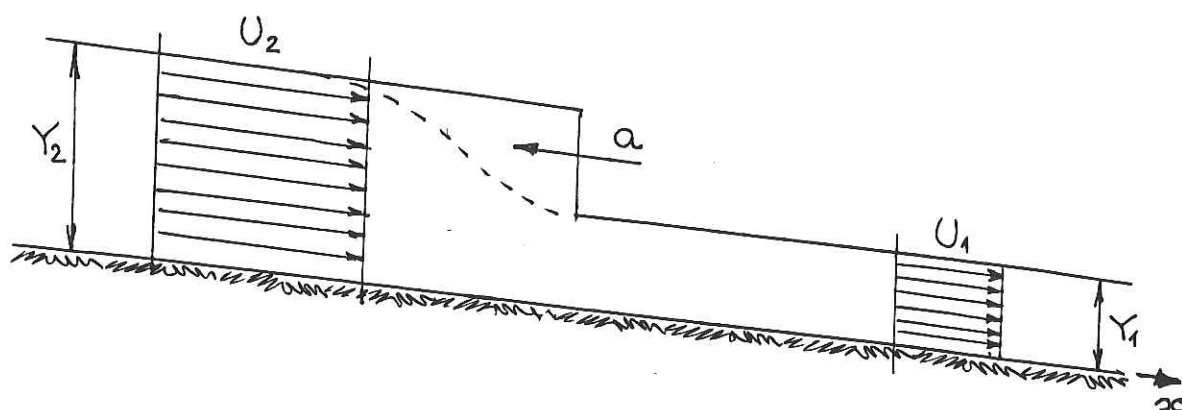


Figura 4.37: Onda negativa che si propaga verso monte.

- d Un esempio di onda positiva: chiusura brusca di una paratoia in canale a sezione rettangolare.

Esaminiamo anzitutto il caso in cui l'onda prodotta dalla chiusura della paratoia dia luogo ad un fronte di ampiezza non sufficientemente elevata da indurre frangimento. In tali condizioni lo studio della propagazione può essere effettuato utilizzando il metodo delle caratteristiche. Essendo l'alveo cilindrico e operando l'ulteriore approssimazione $j \simeq i_f$, le (4.2.47, 48) si riducono alle relazioni:

$$\frac{dx}{dt} = U \pm \sqrt{gY} \quad (4.4.34)$$

$$\frac{dU}{dt} \mp \sqrt{\frac{g}{Y}} \frac{dY}{dt} = 0 \quad (4.4.35)$$

La (4.4.35) si integra immediatamente nella forma:

$$U \mp 2\sqrt{gY} = \text{costante} \quad (4.4.36)$$

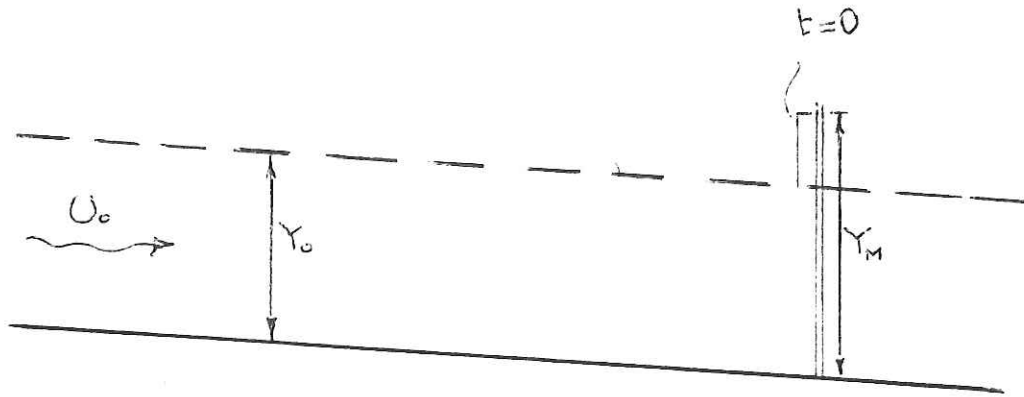


Figura 4.38:

Siano U_0, Y_0 le caratteristiche del moto uniforme preesistente alla manovra. Assunta la chiusura istantanea, le caratteristiche iniziali dell'onda si ottengono imponendo che si abbia (vedi fig. 4.38):

$$U|_{x=0} = 0 \quad t = 0 \quad (4.4.37)$$

Ma sulle caratteristiche negative devono essere soddisfatte le condizioni:

$$c = U - \sqrt{gY} \quad (4.4.38)$$

$$U_0 + 2\sqrt{gY_0} = U + 2\sqrt{gY} \quad (4.4.39)$$

donde

$$c = U_0 + 2\sqrt{gY_0} - 3\sqrt{gY} \quad (4.4.40)$$

Imponendo la (4.4.37) e indicando con Y_M la profondità in corrispondenza della paratoia nell'istante immediatamente successivo alla chiusura segue:

$$Y_M = Y_0 \left(1 + \frac{F_0^2}{2} \right) \quad (4.4.41)$$

e inoltre la celerità iniziale dell'onda assume la forma:

$$c|_{x=0, t=0} = U_0 + 2\sqrt{gY_0} - 3\sqrt{gY_M} \quad (4.4.42)$$

La condizione (4.4.33) suggerisce che il frangimento non si verifica se risulta

$$F_0 \leq 0.87 \quad (4.4.43)$$

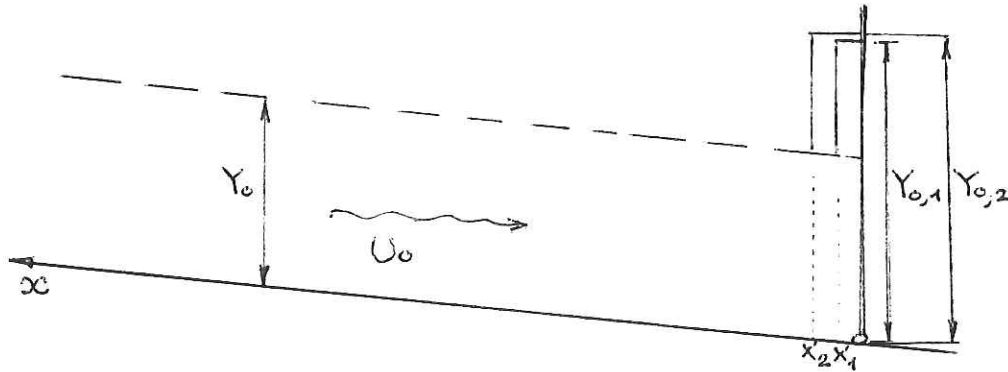


Figura 4.39: Schema di propagazione dell'onda positiva dovuta a chiusura brusca.

Posto che la (4.4.43) risulti violata si ha la propagazione di un fronte frangente. Essa soddisfa le relazioni:

$$a = U_0 + \sqrt{\frac{gY}{2Y_0}(Y_0 - Y)} \quad (4.4.44)$$

$$a = \frac{UY - U_0Y_0}{Y - Y_0} \quad (4.4.45)$$

dove, si noti, U_0 ed U sono quantità negative. Eliminando a fra le (4.4.44, 45) segue:

$$U = U_0 + \left(\frac{Y}{Y_0} - 1\right) \sqrt{\frac{gY_0}{2} \left(\frac{Y_0}{Y} + 1\right)} \quad (4.4.46)$$

Posto $U = 0$ nella (4.4.46) segue infine:

$$\left(\frac{Y_M}{Y_0} - 1\right) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{Y_0}{Y_N} + 1\right)} = F_0 \quad (4.4.47)$$

La (4.4.47) fornisce il valore della sopraelevazione iniziale in corrispondenza della paratoia nel caso in cui il fronte generato dalla chiusura risulta frangente.

Il procedimento di calcolo della propagazione è fondato sull'utilizzo della (4.4.45, 46). Si discretizzi il dominio spaziale identificando una successione di sezioni x_1, x_2, \dots equispaziate con $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ costante. La celerità del fronte all'istante iniziale si ottiene dalla (4.4.45) con $U = 0$ donde

$$a_1 = \frac{|U_0|Y_0}{Y - Y_0} \quad (4.4.48)$$

L'intervallo spaziale Δx è dunque percorso dal fronte frangente nell'intervallo temporale $\Delta t_1 = \Delta x/|a_1|$. Approssimando il profilo nel tronco $x_o - x_1$ con un profilo orizzontale, segue:

$$Y_1 = Y_{o,1} - i_f \Delta x \quad (4.4.49)$$

avendo indicato con $Y_{o,1}$ la profondità in x_o assunta costante nell'intervallo $0 - t_1$ e pari al valore iniziale Y_M .

Il valore della velocità in x_1 all'istante t_1 si ottiene quindi dalla (4.4.46) con $Y = Y_1$:

$$U_1 = U_o + \left(\frac{Y_1}{Y_o} - 1 \right) \sqrt{\frac{gY_o}{2} \left(\frac{Y_o}{Y_1} + 1 \right)} \quad (4.4.50)$$

Assunto che in x_1 la profondità e velocità media risultino pari a Y_1, U_1 rispettivamente nell'intero intervallo Δt_1 , il volume immesso in tale intervallo nel tronco $(x_o - x_1)$ risulta pari a $|U_1|Y_1\Delta t_1$. Tale volume dà luogo ad un sovralzso medio del pelo libero pari a

$$\Delta Y_1 = \frac{|U_1|Y_1\Delta t_1}{\Delta x} \quad (4.4.51)$$

La (4.4.51) consente di aggiornare il valore della profondità nella sezione iniziale all'istante $t_2 = t_1 + \Delta t_1$. Si ha:

$$Y_{o,2} = Y_{o,1} + \Delta Y_1 \quad (4.4.52)$$

Il procedimento può essere quindi iterato. L'insieme di relazioni ricorsive necessarie ai fini del calcolo si può porre nella forma seguente.

$$a_i = \frac{U_i Y_1 - U_o Y_o}{Y_i - Y_o} \quad (4.4.53a)$$

$$(\Delta t)_i = \frac{\Delta x}{|a_i|} \quad (4.4.53b)$$

$$t_i = t_{i-1} + (\Delta t)_i \quad (4.4.53c)$$

$$x_i = i\Delta x \quad (4.4.53d)$$

$$Y_i = Y_{o,i} - i_f x_i \quad (4.4.53e)$$

$$U_i = U_o \left(\frac{Y_i}{Y_o} - 1 \right) \sqrt{\frac{gY_o}{2} \left(\frac{Y_o}{Y_i} + 1 \right)} \quad (4.4.53f)$$

$$(\Delta Y)_i = \frac{|U_i|Y_i(\Delta t)_i}{i\Delta x} \quad (4.4.53g)$$

$$Y_{o,i+1} = Y_{o,i} + (\Delta Y)_i \quad (4.4.53h)$$

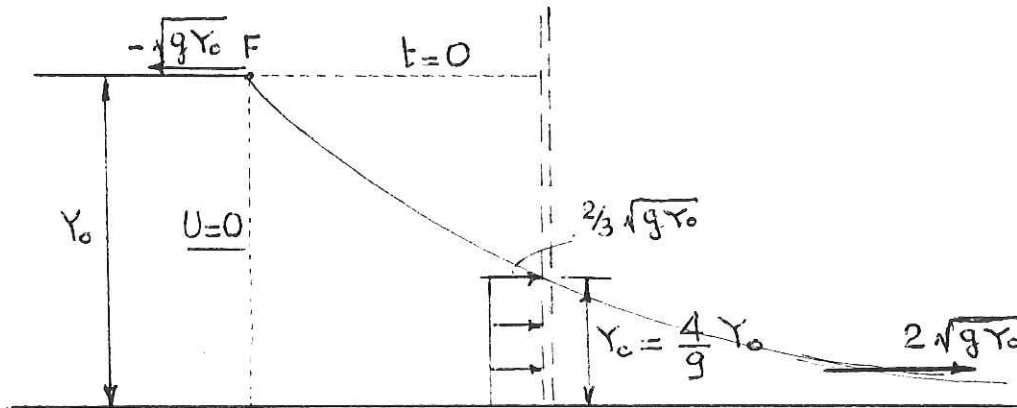


Figura 4.40: Schema di apertura brusca di una paratoia.

L'implementazione numerica del procedimento risulta quindi immediata. Si noti che la relativa semplicità del procedimento di calcolo qui proposto è legata all'ipotesi relativa all'assetto orizzontale del profilo a valle del fronte. Procedimento più raffinato sarebbe la soluzione, ad ogni istante, dell'equazione di de Saint-Venant nel tronco compreso fra la paratoia e il fronte frangente con le condizioni al contorno (4.4.37) e (4.4.46) quest'ultima applicata subito a valle del fronte.

e Un esempio di onda negativa: apertura brusca di una paratoia (il problema del crollo della diga)

Si consideri ora un canale a sezione rettangolare *orizzontale* inizialmente sbarrato da una paratoia che viene istantaneamente rimossa provocando lo svuotamento del bacino a monte della paratoia stessa (fig. 4.40).

Malgrado la condizione iniziale corrispondente alla situazione ideale qui delineata determini un fronte discontinuo con una parte del canale asciutta è possibile affrontare lo studio utilizzando il procedimento alle caratteristiche poiché il fronte è instabile e dà luogo ad un'onda negativa non frangente.

Detta Y_0 la profondità iniziale nel canale, essendo qui U_0 nullo, le (4.4.38, 39) diventano:

$$c = U - \sqrt{gY} \quad (4.4.54)$$

$$U + 2\sqrt{gY} = 2\sqrt{gY_0} \quad (4.4.55)$$

donde:

$$c = 2\sqrt{gY_o} - 3\sqrt{gY} \quad (4.4.56)$$

La (4.4.56) suggerisce immediatamente che il piede anteriore dell'onda A (in cui $Y \rightarrow 0$) avanza con celerità $2\sqrt{gY_o}$ mentre il fronte posteriore (punto F in figura 4.41) arretra con celerità $-\sqrt{gY_o}$.

Inoltre dalla (4.4.55) segue che la corrente accelera dalla velocità nulla del corpo idrico a monte della sezione F fino alla massima velocità pari a $2\sqrt{gY_o}$ sul piede anteriore dell'onda.

Naturalmente tali considerazioni vanno riguardate come puramente qualitative poiché lo schema di corrente cessa di essere valido quando la profondità tende ad annullarsi.

La (4.4.56) suggerisce inoltre che la sezione del profilo in cui si ha:

$$Y = Y_c = \frac{4}{9}Y_o \quad (4.4.57)$$

si mantiene con caratteristiche immutate nel corso della propagazione. Essendo caratterizzata da valore nullo di c tale sezione si mantiene coincidente con la sezione $x = 0$ (la sezione inizialmente occupata dalla paratoia). Inoltre la (4.4.55) fornisce

$$U_c = U|_{Y=Y_c} = \frac{2}{3}\sqrt{gY_o} \quad (4.4.58)$$

donde la portata per unità di larghezza nella sezione c risulta espressa dalla relazione:

$$Q_c = U_c Y_c = \frac{8}{27}\sqrt{gY_o} Y_o \quad (4.4.59)$$

È immediato mostrare che la (4.4.59) determina *condizioni critiche* di deflusso nelle assegnate condizioni. Ciò emerge osservando che, per la (4.4.55) la portata per unità di larghezza nella generica sezione dell'onda può porsi nella forma:

$$Q = UY = 2(\sqrt{gY_o} - \sqrt{gY})Y \quad (4.4.60)$$

Segue

$$\left. \frac{dQ}{dY} \right|_{Y=Y_c} = 2\sqrt{gY_o} - 3\sqrt{gY}|_{Y=Y_c} = 0 \quad (4.4.61)$$

Si noti che la (4.4.59) fornisce anche una stima della portata massima che una pompa può derivare da un canale senza indurre scoprimiento del fondo.

4.5 Effetti dispersivi nelle onde di correnti a superficie libera: onde cnoidali e onda solitaria

a Equazioni di Boussinesq (1871)

Ritorniamo al problema della propagazione di onde di gravità nella sua formulazione generale (4.1.13). Al fine di ricavare un sistema di equazioni differenziali che descriva la presenza di *effetti di dispersione* nella propagazione di onde di correnti a superficie libera è opportuno rendere adimensionali le (4.1.13). Poniamo, dunque, nel caso di onde 2-D,

$$x = Lx^* \quad z = Y_0 z^* \quad t = \frac{L}{c_0} t^*$$

$$\eta = a\eta^* \quad \Phi = \Phi^* \frac{gL a}{c_0} \quad c_0 = \sqrt{gY_0} \quad (4.5.1a - f)$$

avendo indicato con l'asterisco le grandezze adimensionali, con Y_0 una profondità caratteristica del moto, con L la lunghezza d'onda, con c_0 una celerità caratteristica del fenomeno di propagazione, con a un'ampiezza caratteristica dell'onda. Le (4.1.13) diventano:

$$\left(\frac{Y_0}{L}\right)^2 \Phi^*_{,x^*x^*} + \Phi^*_{,z^*z^*} = 0 \quad \left(0 < z^* < \left[1 + \left(\frac{a}{Y_0}\right)\eta^*\right]\right) \quad (4.5.2a)$$

$$\Phi^*_{,z^*} = 0 \quad (z^* = 0) \quad (4.5.2b)$$

$$\eta^*_{,t^*} + \left(\frac{a}{Y_0}\right) \Phi^*_{,x^*} \eta^*_{,x^*} - \frac{1}{(Y_0/L)^2} \Phi^*_{,z^*} = 0 \quad \left(z^* = 1 + \frac{a}{Y_0} \eta^*\right) \quad (4.5.2c)$$

$$\eta^* + \Phi^*_{,t^*} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{Y_0}\right) (\Phi^*_{,x^*})^2 + \frac{1}{2} \frac{a/Y_0}{(Y_0/L)^2} (\Phi^*_{,z^*})^2 = 0 \quad \left(z^* = 1 + \frac{a}{Y_0} \eta^*\right) \quad (4.5.2d)$$

Poniamo ora:

$$\Phi^* = \sum_0^{\infty} (z^*)^n F_n(x, t) \quad (4.5.3)$$

La (4.5.3) è suggerita dal carattere di *onda su acqua bassa* la cui approssimazione di ordine minore è quella delle *onde iperboliche* trattate nel §4.2. Le (4.5.2a-b) sono soddisfatte dalla soluzione (4.5.3) con l'annullarsi di tutte le

funzioni F_n di ordine dispari. Sostituendo quest'ultima nella (4.5.2a) segue inoltre:

$$2F_2 = -\left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 F_{o,x^*x^*} \quad (4.5.4a)$$

$$12F_4 = -\left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 F_{2,x^*x^*} \quad (4.5.4b)$$

(.....)

donde

$$\Phi^* = \sum_0^{\infty} (z^*)^{2m} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{Y_o}{L}\right)^{2m} \frac{\partial^{2m} F^*}{\partial x^{*(2m)}} \quad (4.5.5)$$

con $F^* \equiv F_o$.

Sostituendo nelle condizioni al contorno (4.5.2c,d) si ottiene:

$$\begin{aligned} \eta^*_{,t^*} + \left(\frac{a}{Y_o}\right) \eta^*_{,x^*} \left\{ F^*_{,x^*} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{Y_o} \eta^*\right)^2 F^*_{,x^*x^*x^*} \left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 + \dots \right\} + \\ + \left(1 + \frac{a}{Y_o} \eta^*\right) F^*_{,x^*x^*} - \frac{1}{6} \left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 F^*_{,x^*x^*x^*x^*} \left[1 + \frac{a}{Y_o} \eta^*\right] + \dots = 0 \end{aligned} \quad (4.5.6a)$$

$$\begin{aligned} \eta^* + \left\{ F^*_{,t^*} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{Y_o} \eta^*\right)^2 \left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 F^*_{,x^*x^*t^*} + \dots \right\} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{Y_o}\right) \left\{ (F^*_{,x^*})^2 - \left(1 + \frac{a}{Y_o} \eta^*\right)^2 F^*_{,x^*} F^*_{,x^*x^*x^*} \left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 + \dots \right\} \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{Y_o}\right) \left\{ \left(1 + \frac{a}{Y_o} \eta^*\right)^2 (F^*_{,x^*x^*})^2 \left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 + \dots \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.5.6b)$$

Se si trascurano tutti i termini $0(Y_o/L)^2$ o inferiori nelle (4.5.6a-b), derivando la (4.5.6b) rispetto a x si ottengono le equazioni delle *onde su acqua bassa*

$$\eta^*_{,t^*} + U^*_{,x^*} + \left(\frac{a}{Y_o}\right) (\eta^* U^*)_{,x^*} = 0 \quad (4.5.7a)$$

$$U^*_{,t^*} + \left(\frac{a}{Y_o}\right) U^* U^*_{,x^*} + \eta^*_{,x^*} = 0 \quad (4.5.7b)$$

avendo posto $U^* \equiv F^*_{,x^*}$. Le (4.5.7a,b) si riducono facilmente alle (4.1.1, 2) purché siano ricondotte a forma dimensionale e si ricordi che nella loro derivazione si è assunto che il moto sia bidimensionale e ideale e che la propagazione avvenga su una preesistente massa liquida in quiete.

Se si mantengono termini proporzionali a $(Y_o/L)^2$, trascurando termini $0(a/Y_o)$ e $0(Y_o/L)^2$, si ottiene

$$\eta^*_{,t^*} + \left\{ \left(1 + \frac{a}{Y_o} \eta^* \right) \hat{U}^* \right\}_{,x^*} - \frac{1}{6} \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \hat{U}^*_{,x^*x^*x^*} + 0 \left[\left(\frac{Y_o}{L} \right)^4, \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \left(\frac{a}{Y_o} \right) \right] = 0 \quad (4.5.8a)$$

$$\eta^*_{,x^*} + \hat{U}^*_{,t^*} - \frac{1}{2} \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \hat{U}^*_{,x^*x^*t^*} + \left(\frac{a}{Y_o} \right) \hat{U}^* \hat{U}^*_{,x^*} + 0 \left[\left(\frac{Y_o}{L} \right)^4, \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \left(\frac{a}{Y_o} \right) \right] = 0 \quad (4.5.8b)$$

con $\hat{U}^* \equiv F^*_{,x^*}$.

Le (4.5.8a,b) possono essere espresse in funzione del valor medio U^* della componente orizzontale della velocità, la media essendo eseguita rispetto alla variabile z^* . Si ha

$$\Phi^*_{,x^*} = F^*_{,x^*} - \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \frac{(z^*)^2}{2} F^*_{,x^*x^*x^*} + 0 \left(\frac{Y_o}{L} \right)^4 = \hat{U}^* - \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \frac{(z^*)^2}{2} \hat{U}^*_{,x^*x^*} + \dots \quad (4.5.9a)$$

donde, mediando

$$U^* = \hat{U}^* - \frac{1}{6} \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \hat{U}^*_{,x^*x^*} + 0 \left(\frac{Y_o}{L} \right)^4 \quad (4.5.9b)$$

o, invertendo,

$$\hat{U}^* = U^* + \frac{1}{6} \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 U^*_{,x^*x^*} + 0 \left(\frac{Y_o}{L} \right)^4 \quad (4.5.9c)$$

Sostituendo la (4.5.9c) nelle (4.5.8) segue infine:

$$\eta^*_{,t^*} + \left\{ \left(1 + \frac{a}{Y_o} \eta^* \right) U^* \right\}_{,x^*} = 0 \left[\frac{a}{Y_o} \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2, \left(\frac{Y_o}{L} \right)^4 \right] \quad (4.5.10a)$$

$$\eta^*_{,x^*} + U^*_{,t^*} + \left(\frac{a}{Y_o} \right) U^* U^*_{,x^*} - \frac{1}{3} \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 U^*_{,x^*x^*t^*} = 0 \left[\frac{a}{Y_o} \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2, \left(\frac{Y_o}{L} \right)^4 \right] \quad (4.5.10b)$$

Le (4.5.10) possono infine ridursi alle equazioni di Boussinesq (1871) in forma adimensionale

$$\eta^*_{,t^*} + \left[\left(1 + \frac{a}{Y_o} \eta^* \right) U^* \right]_{,x^*} = 0 \quad (4.5.11a)$$

$$\eta^*_{,x^*} + U^*_{,t^*} + \frac{a}{Y_o} U^* U^*_{,x^*} + \frac{1}{3} \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \eta^*_{,x^*t^*t^*} = 0 \quad (4.5.11b)$$

o, tornando alla forma dimensionale e posto $Y = Y_o + \eta$,

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(YU) = 0 \quad (4.5.12a)$$

$$g \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{3} Y_o \frac{\partial^3 Y}{\partial x \partial t^2} = 0 \quad (4.5.12b)$$

Le equazioni di Boussinesq ammettono soluzioni relative a onde che si propagano verso destra e verso sinistra. Il carattere dispersivo delle soluzioni delle equazioni di Boussinesq è associato alla presenza del termine proporzionale a $(Y_o/L)^2$ nella (4.5.11b). Infatti, linearizzando le (4.5.11), cioè trascurando termini di $0(a/Y_o)$, le equazioni di Boussinesq per onde di ampiezza infinitesima si riducono all'equazione

$$\eta^*_{,t^*t^*} - \eta^*_{,x^*x^*} - \frac{1}{3} \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 \eta^*_{,x^*x^*t^*t^*} = 0 \quad (4.5.13)$$

ovvero, in termini dimensionali,

$$\eta_{,tt} - c_o^2 \eta_{,xx} - \frac{1}{3} Y_o^2 \eta_{,xxtt} = 0 \quad (4.5.14)$$

La (4.5.14) ammette soluzioni del tipo (4.1.11) che soddisfano la relazione di dispersione

$$\omega^2 = \frac{c_o^2 k^2}{1 + \frac{1}{3} (k Y_o)^2} \quad (4.5.15)$$

b Equazione di Korteweg-de Vries (1895)

L'equazione di Korteweg-de Vries³¹ può ottenersi a partire dalle (4.5.6) esaminando il caso di onde che si propagano solo verso destra. Al minimo ordine di approssimazione in (a/Y_o) e $(Y_o/L)^2$ si ottiene infatti

$$\eta^*_{,t^*} + F^*_{,x^*x^*} = 0 \quad \eta^* + F^*_{,t^*} = 0 \quad (4.5.16a, b)$$

donde

$$F^*_{,x^*} = \hat{U}^* = \eta^* \quad \eta^*_{,x^*} + \eta^*_{,t^*} = 0 \quad (4.5.17a, b)$$

Ricerchiamo ora una soluzione corretta, rispetto alle (4.5.17), da termini del I ordine in (a/Y_o) e $(Y_o/L)^2$. Poniamo dunque

$$\hat{U}^* = \eta^* + \left(\frac{a}{Y_o} \right) A^* + \left(\frac{Y_o}{L} \right)^2 B^* + 0 \left[\left(\frac{a}{Y_o} \right)^2, \left(\frac{Y_o}{L} \right)^4 \right] \quad (4.5.18)$$

³¹Korteweg D. e de Vries G. (1895) Phil. Mag. 5, vol. XXXIX.

Sostituendo la (4.5.18) nelle (4.5.8) segue:

$$\begin{aligned} \eta^*_{,x^*} + \eta^*_{,t^*} + \left(\frac{a}{Y_o}\right) [2\eta^* \eta^*_{,x^*} + A^*_{,x^*}] + \left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 \\ \left[B^*_{,x^*} - \frac{1}{6} \eta^*_{,x^* x^* x^*} \right] + 0 \left[\left(\frac{a}{Y_o}\right)^2, \left(\frac{Y_o}{L}\right)^4 \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.5.19a)$$

$$\begin{aligned} \eta^*_{,x^*} + \eta^*_{,t^*} + \left(\frac{a}{Y_o}\right) [A^*_{,t^*} + \eta^* \eta^*_{,x^*}] + \left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 \\ \left[B^*_{,t^*} - \frac{1}{2} \eta^*_{,x^* x^* t^*} \right] + 0 \left[\left(\frac{a}{Y_o}\right)^2, \left(\frac{Y_o}{L}\right)^4 \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.5.19b)$$

Le due equazioni precedenti sono compatibili se

$$-A^*_{,t^*} + A^*_{,x^*} + \eta^* \eta^*_{,x^*} = 0 \quad -B^*_{,t^*} + B^*_{,x^*} + \frac{1}{2} \eta^*_{,x^* x^* t^*} - \frac{1}{6} \eta^*_{,x^* x^* x^*} = 0 \quad (4.5.20a, b)$$

Essendo per le (4.5.17) e (4.5.18), a meno di termini di ordine superiore,

$$A^*_{,t^*} = -A^*_{,x^*} \quad B^*_{,t^*} = -B^*_{,x^*} \quad \eta^*_{,t^*} = -\eta^*_{,x^*} \quad (4.5.21a, c)$$

segue

$$A^*_{,x^*} + \frac{1}{2} \eta^* \eta^*_{,x^*} = 0 \quad B^*_{,x^*} - \frac{1}{3} \eta^*_{,x^* x^* x^*} = 0 \quad (4.5.22a, b)$$

cioè

$$A^* = -\frac{1}{4} \eta^{*2} \quad B^* = \frac{1}{3} \eta^*_{,x^* x^*} \quad (4.5.23a, b)$$

Se ne conclude che il sistema che descrive l'evoluzione spazio-temporale dell'ampiezza η si scrive:

$$\hat{U} = \eta^* - \frac{1}{4} \eta^{*2} \left(\frac{a}{Y_o}\right) + \frac{1}{3} \eta^*_{,x^* x^*} \left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 \quad (4.5.24a)$$

$$\eta^*_{,t^*} + \eta^*_{,x^*} + \frac{3}{2} \eta^* \eta^*_{,x^*} \left(\frac{a}{Y_o}\right) + \frac{1}{6} \eta^*_{,x^* x^* x^*} \left(\frac{Y_o}{L}\right)^2 = 0 \quad (4.5.24b)$$

Le equazioni precedenti sono state derivate per la prima volta da Korteweg e de Vries nel 1895. In forma dimensionale esse diventano:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_o \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{Y_o} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} c_o Y_o^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (4.5.25a)$$

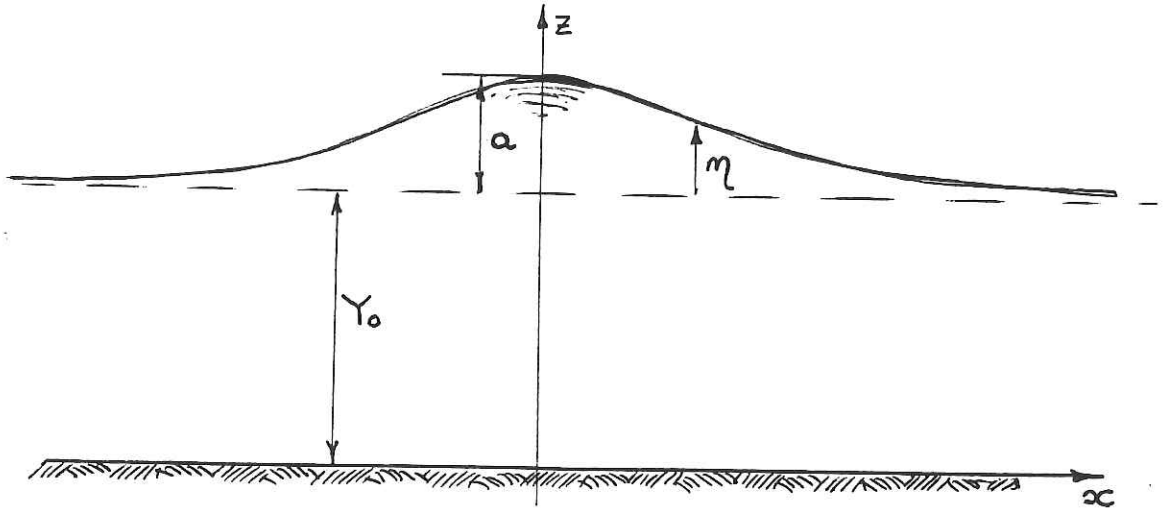


Figura 4.41: Schema dell'onda solitaria.

$$U = \sqrt{\frac{g}{Y_0}} \left[\eta - \frac{1}{4Y_0} \eta^2 + \frac{1}{6} Y_0^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right] \quad (4.5.25b)$$

Si osservi come, sempre attraverso termini proporzionali a $(Y_0/L)^2$, le equazioni di Korteweg-de Vries includono effetti dispersivi nelle onde di correnti a superficie libera. Il carattere dispersivo delle soluzioni può ancora essere facilmente evidenziato nel caso delle onde di ampiezza infinitesima.

c Onda solitaria

L'onda solitaria è costituita da una singola ondulazione della superficie libera che si propaga senza deformarsi e con celerità costante su una massa in quiete (o su un moto base uniforme) (figura 4.41). Essa fu osservata per la prima volta da Scott Russel (1844)³². La sua struttura può essere derivata rigorosamente a partire dall'equazione di Korteweg-de Vries. Soluzioni approssimate per l'onda solitaria erano state ottenute da Boussinesq (1871) e Rayleigh (1876)³³.

Detta c la celerità dell'onda, poniamo dunque

$$\eta = Y_0 \zeta(X) \quad (4.5.26)$$

³²Scott Russel J. (1844) Rep. Brit. Ass.

³³Rayleigh L. (1876) Phil. Mag., 5, vol. I.

con

$$X = \frac{x - ct}{Y_o} \quad (4.5.27)$$

Consideriamo cioè *soluzioni stazionarie* rispetto a un riferimento in moto con celerità c . La (4.5.25a) porge dunque:

$$\frac{1}{6}\zeta_{,XXX} + \frac{3}{2}\zeta\zeta_{,X} - \left(\frac{c}{c_o} - 1\right)\zeta_{,X} = 0 \quad (4.5.28a)$$

Integrando una prima volta segue:

$$\frac{1}{6}\zeta_{,XX} + \frac{3}{4}\zeta^2 - \left(\frac{c}{c_o} - 1\right)\zeta_{,X} + G = 0 \quad (4.5.28b)$$

Moltiplicando per $\zeta_{,X}$ e integrando ancora si ha

$$\frac{1}{3}\zeta^2_{,X} + \zeta^2 - 2\left(\frac{c}{c_o} - 1\right)\zeta^2 + 4G\zeta + H = 0 \quad (4.5.28c)$$

con G ed H costanti di integrazione.

Se poniamo come condizioni al contorno

$$\zeta \Rightarrow 0 \quad \zeta_{,X} \Rightarrow 0 \quad \zeta_{,XX} \Rightarrow 0 \quad \text{per } X \Rightarrow \pm\infty \quad (4.5.29a, c)$$

segue $G = H = 0$, e la (4.5.28c) diventa

$$\frac{1}{3}\left(\frac{d\zeta}{dX}\right)^2 = \zeta^2(\alpha - \zeta) \quad (4.5.30)$$

con

$$\alpha = 2\left(\frac{c}{c_o} - 1\right) \quad (4.5.31)$$

La (4.5.30) suggerisce che ζ cresce da 0 (per $X \rightarrow -\infty$) a un massimo pari ad α e ritorna simmetricamente a 0 per $X \rightarrow \infty$. Dunque α gioca il ruolo di *ampiezza dell'onda* (rapportata alla profondità Y_o). Dunque:

$$c = c_o \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{Y_o}\right) \quad (4.5.32)$$

La (4.5.30) può risolversi in forma esatta e fornisce

$$\zeta = \alpha \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{3a}{4}\right)^{1/2} X \right] \quad (4.5.33a)$$

o

$$\eta = a \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{3a}{4Y_o^3} \right)^{1/2} (x - ct) \right] \quad (\text{equazione dell'onda solitaria}) \quad (4.5.33b)$$

La (4.5.33b) è soluzione dell'equazione di Korteweg-de Vries per ogni valore di (a/Y_o) . Essa è stata derivata però nell'ipotesi che $(a/Y_o) \ll 1$. Le osservazioni sperimentali suggeriscono che le onde solitarie frangono per $(a/Y_o) \simeq .78$; il valore previsto teoricamente è $(a/Y_o) = .78$.

d Onde cnoidali

Consideriamo ora il caso generale in cui le costanti G e H sono non nulle. La (4.5.28c) diventa

$$\left(\frac{d\zeta}{dX} \right)^2 = C(\zeta) \quad (4.5.34)$$

con $C(\zeta)$ polinomio del III ordine caratterizzato da radici semplici.

Senza perdita di generalità si può porre

$$C(\zeta) = 3\zeta(\alpha - \zeta)(\zeta - \alpha + \beta) \quad (0 < \alpha < \beta) \quad (4.5.35)$$

il che equivale a localizzare uno zero nell'origine, un secondo per ζ pari ad α (colmo) e il terzo per un valore negativo di $\zeta = -(\beta - \alpha)$ (cavo). Ciò deriva dalla considerazione che, per mantenersi limitata, la soluzione deve oscillare periodicamente fra due zeri del polinomio a secondo membro.

Segue:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{d\zeta}{dX} \right)^2 = \zeta(\alpha - \zeta)(\zeta - \alpha + \beta) \quad (4.5.36)$$

Confrontando le (4.5.36) e (4.5.28c) si ottiene

$$\frac{c}{c_o} = 1 + \frac{2\alpha - \beta}{2} \quad (4.5.37)$$

È qui di interesse notare che, ove la soluzione (non lineare) fosse espressa nella forma caratteristica delle onde dispersive

$$\zeta = f(kx - \omega t) \quad (f \text{ periodica in } 2\pi) \quad (4.5.38)$$

la (4.5.37) diventerebbe:

$$\omega = ck = \left(1 + \frac{2\alpha - \beta}{2}\right) c_0 k \quad (4.5.39)$$

La (4.5.39) evidenzia come c assolve al ruolo di *velocità di fase*: ciascun punto del profilo dell'onda si propaga con tale valore della celerità.

Un'importante osservazione relativa alla (4.5.39) è legata al fatto che ω risulta funzione di k ed α . Ne consegue che la *relazione di dispersione* (4.5.39) pone una dipendenza della frequenza angolare sia dal numero d'onda sia (attraverso α) dall'ampiezza d'onda. Questa è una caratteristica tipica delle *onde non lineari*.

Torniamo alla soluzione della (4.5.36).

i) Se l'onda è di *piccola ampiezza* ($\alpha \ll 1$) segue:

$$\frac{1}{3} \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 = \zeta(\alpha - \zeta)\beta \quad (4.5.40a)$$

$$\frac{c}{c_0} = 1 - \frac{\beta}{2} \quad (4.5.40b)$$

L'equazione (4.5.40a) si risolve immediatamente nella forma

$$\zeta = \frac{\alpha}{2} \left[1 + \cos\left(\sqrt{3\beta}X\right)\right] \quad (4.5.41)$$

donde, posto

$$k = \frac{\sqrt{3\beta}}{Y_0} \quad (4.5.42)$$

si ha

$$\zeta = \frac{\alpha}{2} [1 + \cos(kx - \omega t)] \quad (4.5.43a)$$

con

$$\omega = ck = c_0 k \left(1 - \frac{1}{6} Y_0^2 k^2\right) \quad (4.5.43b)$$

La (4.5.43b) si accorda con la relazione di dispersione generale valida per le onde di piccola ampiezza (4.1.19). Si noti come, avendo assunto l'ampiezza piccola, sia scomparsa nella (4.5.43b) la dipendenza dall'ampiezza.

ii) Per $\alpha \rightarrow \beta$ la lunghezza d'onda, espressa dalla relazione

$$L = \frac{2Y_o}{\sqrt{3}} \int_0^\alpha \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\alpha - \zeta)(\zeta - \alpha + \beta)}} \quad (4.5.44)$$

tende a infinito: si ritrova cioè la soluzione relativa all'onda solitaria.

iii) Nel caso generale la soluzione della (4.5.36) è esprimibile nella forma

$$\zeta = \alpha \operatorname{cn}^2 \left[\left(\frac{3\beta}{4} \right)^{1/2} X \right] \quad (4.5.45)$$

con cn funzione ellittica di Jacobi $\operatorname{cn}(x)$ di modulo m pari a $\sqrt{\alpha}/\beta$ e lunghezza d'onda L pari a $4Y_o/(\sqrt{3}\beta)K(m)$, con $K(m)$ integrale completo di prima specie.

Korteweg e de Vries hanno denominato tali onde *cnoïdali*. Si noti come, con le definizioni date, β si riveli una misura del *parametro di dispersione* $(Y_o/L)^2$ mentre m misura l'importanza relativa di effetti non lineari ed effetti di dispersione.

Si ha inoltre:

$$m \rightarrow 0 \quad \operatorname{cn}(z) \rightarrow \cos(z) \quad (\text{limite delle onde di Stokes})$$

$$m \rightarrow 1 \quad \operatorname{cn}(z) \rightarrow \operatorname{sech}(z) \quad (\text{limite dell'onda solitaria})$$

4.6 Roll waves

Con locuzione anglosassone vengono denominate 'roll waves' quelle onde stazionarie che si presentano, in alvei a pendenza molto forte, attraverso una successione regolare di *treni d'onde frangenti* che spesso subiscono processi di aerazione (fig. 4.42).

La formazione di tali onde è interpretabile come dovuta a un *fenomeno di instabilità*. In altre parole in talune condizioni un moto uniforme a superficie libera perde stabilità a favore di una diversa configurazione di moto 'più stabile'.

L'esame delle condizioni nelle quali tale processo si manifesta può svolgersi considerando un moto uniforme a superficie libera, con velocità U_o e

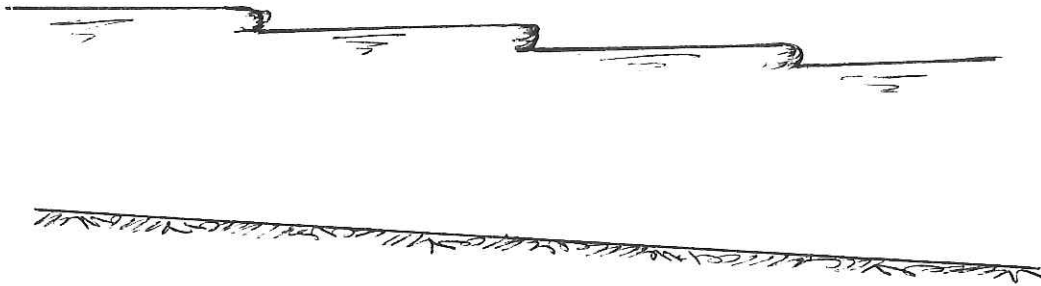


Figura 4.42:

profondità Y_0 , perturbato da disturbi del campo di moto sufficientemente piccoli (a rigore infinitesimi) da consentire la linearizzazione delle equazioni che ne governano l'evoluzione.

Poniamo, dunque,

$$Y = Y_0 + y \quad U = U_0 + u \quad (4.6.1a, b)$$

nelle (4.1.1), (4.1.2), con $u \ll U_0$ e $y \ll Y_0$, ed assumiamo per semplicità rettangolare la sezione della corrente. Trascurando termini quadratici nelle perturbazioni (u, y) ed esprimendo j nella forma $U^2/(C^2 g Y)$ si trova

$$y_{,t} + U_0 y_{,x} + Y_0 u_{,x} = 0 \quad (4.6.2)$$

$$u_{,t} + g y_{,x} + U_0 u_{,x} + g i_f \left(2 \frac{u}{U_0} - \frac{y}{Y_0} \right) = 0 \quad (4.6.3)$$

Eliminando u si ottiene la seguente equazione per y

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_- \frac{\partial}{\partial x} \right) y + \frac{2g i_f}{U_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) y = 0 \quad (4.6.4)$$

con

$$c_+ = U_o + \sqrt{gY_o} \quad c_- = U_o - \sqrt{gY_o} \quad c_o = mU_o \quad m = \frac{3}{2} \quad (4.6.5a, d)$$

Si noti che nella derivazione della (4.6.4) si è assunto costante il coefficiente di conduttanza C .

La (4.6.4) ammette soluzioni del tipo

$$y \propto \exp[\Omega t] \exp[i(kx - \omega t)] \quad (4.6.6)$$

con ω , Ω e k legati dalla relazione

$$\frac{U_o}{2gi_f} [(\Omega - i\omega + ikU_o)^2 + k^2gY_o] + (\Omega - i\omega) + ikc_o = 0 \quad (4.6.7)$$

Tali soluzioni risultano esponenzialmente crescenti nel tempo se Ω risulta positivo.

La parte immaginaria della (4.6.7) fornisce

$$\Omega = \frac{gi_f}{U_o} \frac{\alpha - m\lambda}{\lambda - \alpha} = \frac{gi_f}{U_o} \left[-1 + \frac{\lambda(1-m)}{\lambda - \alpha} \right] \quad (4.6.8)$$

avendo definito un numero d'onda e una celerità adimensionali nella forma

$$\lambda = kY_o \quad \alpha = \omega \frac{Y_o}{U_o} \quad (4.6.9a, b)$$

La parte reale della (4.6.7) porge

$$\Omega = \frac{gi_f}{U_o} \left[-1 + \sqrt{1 - \lambda^2 \frac{F_o^2}{i_F^2} + \frac{F_o^4}{i_F^2} (\alpha - \lambda)^2} \right] \quad (4.6.10a)$$

$$F_o = \frac{U_o}{\sqrt{gY_o}} \quad (4.6.10b)$$

avendo escluso la soluzione con il segno negativo che fornisce sempre valori negativi di Ω . Confrontando la (4.6.8) e la (4.6.10a) si ottiene un'equazione algebrica di II grado per $(\alpha - \lambda)^2$ che, risolta, fornisce:

$$(\alpha - \lambda)^2 = \left\{ F_o^2 \frac{\lambda^2}{i_F^2} - 1 + \sqrt{\left(F_o^2 \frac{\lambda^2}{i_F^2} - 1 \right)^2 + 4 \frac{F_o^4}{i_F^2} (m-1)^2 \lambda^2} \right\} \left(\frac{2F_o^4}{i_F^2} \right)^{-1} \quad (4.6.11a)$$

e quindi

$$\Omega = \frac{g i_f}{U_o} \left[-1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - F_o^2 \frac{\lambda^2}{i_F^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - F_o^2 \frac{\lambda^2}{i_F^2} \right)^2 + 4 \frac{F_o^4}{i_F^2} \lambda^2 (m-1)^2}} \right] \quad (4.6.11b)$$

Le (4.6.11a,b) forniscono la celerità $c = \omega/k$ e il coefficiente di amplificazione Ω in funzione del numero d'onda per assegnate caratteristiche del moto uniforme. In particolare, ponendo $\Omega = 0$ nella (4.6.11b) si ottiene la *condizione critica per la formazione delle roll-waves* che si trova assumere la semplice forma

$$F_o^2 (m-1)^2 = 1 \quad (4.6.12a)$$

cioè, ricordando la (4.6.5d)

$$F_o = 2 \quad (4.6.12b)$$

Dunque ω risulta positivo, cioè la teoria lineare prevede la formazione di roll-waves, quando $F_o > 2$.

Il campo di moto che ne risulta è stato osservato per la prima volta da Cornish nel 1905. Fu Jeffreys (1925)³⁴ a interpretarlo come fenomeno di instabilità pur non riuscendo a riprodurre il fenomeno sperimentalmente in modo soddisfacente. Si osservi infatti che il superamento della condizione (4.6.12) non è sufficiente per il manifestarsi di treni d'onda frangenti. Correnti con numero di Froude superiori al valore critico che fluiscono in canali di lunghezza limitata possono all'osservazione presentarsi come stabili perché la lunghezza del canale non è sufficiente per consentire l'amplificazione e il frangimento delle perturbazioni. Un esempio di roll waves osservato da Cornish (1934)³⁵ si riferisce a una condotta di pietra localizzata sulle Alpi (presso Grunnbach, Merlingen). I dati riportati sono $i_f = 1/14$, $Y_o = 7.6$ cm, $U_o = 3$ m/s, $c = 4.05$ m/s.

I risultati teorici risultano in ragionevole accordo con quelli osservati sperimentalmente. Si osservi tuttavia che la (4.6.11a) predice la celerità della 'roll waves' nella fase di formazione in cui la loro ampiezza è molto piccola, mentre i valori osservati si riferiscono a 'roll waves' pienamente sviluppate.

Dressler (1949)³⁶ esaminò poi in che modo è possibile costruire soluzioni non lineari delle equazioni inserendo discontinuità per rappresentare i fronti

³⁴Jeffreys H. (1925) Phil. Mag. 6, 49.

³⁵Cornish R.F. (1934) Ocean waves and kindred geophysical phenomena, Cambridge Univ. Press.

³⁶Dressler R.F. (1949) Comm. Pure Appl. Math., 2.

frangenti in modo analogo a quanto visto al punto 4.4 c. Si tratta in questo caso di inserire discontinuità che soddisfano alle (4.2.70-71) fra tronchi di profilo della superficie libera, continui e monotoni. Quest'ultima condizione si ottiene imponendo che per $Y = \sqrt[3]{K^2/g}$, quando il denominatore della (4.2.79) si annulla, si annulli anche il numeratore attraverso una opportuna scelta di a . In tal modo il denominatore cambia segno, ma si mantiene costante il segno di dY/dX cioè l'andamento monotono del profilo. Rimandiamo il lettore interessato alla memoria originale di Dressler (1949) per ulteriori approfondimenti.

Capitolo 5

CORRENTI BIDIMENSIONALI

5.1 Moti stazionari supercritici: teoria

a Introduzione

È caratteristica fondamentale dei deflussi supercritici la presenza di accentuate *perturbazioni stazionarie*, disposte in direzione *obliqua* rispetto al moto principale, originate da qualsiasi deviazione, anche graduale, della geometria dell'alveo dall'assetto rettilineo. Lo studio di queste perturbazioni non può quasi mai essere svolto nell'ambito del modello 1-D, cioè trattando il moto come quello di una corrente.

Nel seguito verrà adottato un modello 2-D in cui si opererà la drastica semplificazione di ritenere il moto ideale e irrotazionale. Ciò consente, come si vedrà, di istituire un'analogia di notevole interesse fra i fenomeni qui trattati e quelli che si incontrano nell'ambito della Gasdinamica.

I moti supercritici non sono infrequenti nell'Idraulica naturale e nelle costruzioni idrauliche. La determinazione dell'assetto plani-altimetrico della superficie libera in questi deflussi è quindi strumento rilevante nella progettazione e nell'interpretazione dei processi naturali.

b Formulazione: l'equazione di Monge-Ampere

Consideriamo dunque il deflusso ideale irrotazionale in alveo cilindrico a sezione rettangolare di un liquido in moto stazionario che modelliamo come bidimensionale (figura 5.1).

Si assuma il riferimento (x, y, z) con (x, y) appartenente al fondo, si trascurino i termini dispersivi, le derivate longitudinali e trasversali delle tensioni di Reynolds, la tensione trasversale agente sul fondo e la differenza fra

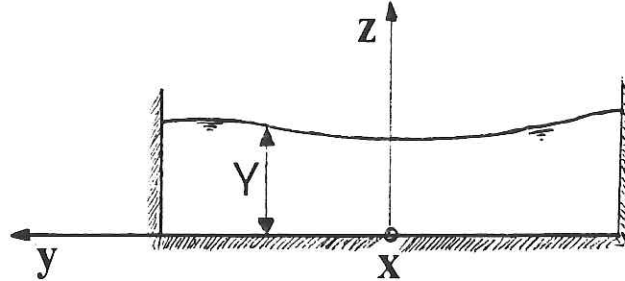


Figura 5.1:

il termine nella tensione longitudinale al fondo e quello nella pendenza del fondo. In tal caso le equazioni (1.3.16, 17, 18) diventano

$$\frac{\partial Y \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial Y \tilde{V}}{\partial y} = 0 \quad (5.1.1a)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{1}{g} \left[\tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial Y} \right] \quad (5.1.1b)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{1}{g} \left[\tilde{U} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} + \tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right] \quad (5.1.1c)$$

con (\tilde{U}, \tilde{V}) vettore velocità mediata sulla verticale.

L'irrotazionalità locale impone in particolare

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (5.1.2)$$

con (U, V) velocità locale (media nel senso della turbolenza). Mediando sulla verticale si ha

$$\int_0^Y \frac{\partial U}{\partial y} dz = \int_0^Y \frac{\partial V}{\partial x} dz \quad (5.1.3)$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^Y U dz - [U]_{z=Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^Y V dz - [V]_{z=Y} \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (5.1.4)$$

Confondendo $[U]_{z=Y}$ con \tilde{U} e $[V]_{z=Y}$ con \tilde{V} si ottiene infine

$$\frac{\partial Y \tilde{U}}{\partial y} - \tilde{U} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{V} Y}{\partial x} - \tilde{V} \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (5.1.5a)$$

o

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x} \quad (5.1.5b)$$

cioè l'irrotazionalità per il campo di velocità mediato lungo la verticale. Sostituendo la (5.1.5b) nelle (5.1.1b,c) seguono le relazioni

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x} [\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2] \quad (5.1.6a)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = -\frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial y} [\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2] \quad (5.1.6b)$$

Le (5.1.6a,b) sostituite nella (5.1.1a) forniscono quindi:

$$gY \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right) - \tilde{U} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2}{2} \right) - \tilde{V} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2}{2} \right) = 0 \quad (5.1.7)$$

Introducendo infine il potenziale medio ϕ tale che

$$\tilde{U} = \phi_{,x} \quad (5.1.8a)$$

$$\tilde{V} = \phi_{,y} \quad (5.1.8b)$$

e definendo

$$c^2 = gY \quad (5.1.8c)$$

la (5.1.7) assume infine la forma

$$(c^2 - \tilde{U}^2)\phi_{,xx} + (c^2 - \tilde{V}^2)\phi_{,yy} - 2\tilde{U}\tilde{V}\phi_{,xy} = 0 \quad (5.1.9)$$

La (5.1.9) è un'equazione differenziale alle derivate parziali non-lineare del II ordine e costituisce una forma particolare dell'equazione di Monge-Ampere. Essa si riduce alla classica equazione di Laplace per il potenziale ϕ quando \tilde{U} e \tilde{V} risultano piccole rispetto a c .

È facile riconoscere il carattere di questa equazione differenziale in dipendenza del segno del discriminante

$$\Delta = B^2 - AC = \tilde{U}^2 + \tilde{V}^2 - c^2 \quad (5.1.10a)$$

con

$$A = c^2 - \tilde{U}^2 \quad (5.1.10b)$$

$$C = c^2 - \tilde{V}^2 \quad (5.1.10c)$$

$$B = \tilde{U}\tilde{V} \quad (5.1.10d)$$

Si ha infatti

$\Delta < 0$ equazione ellittica

$\Delta = 0$ equazione parabolica

$\Delta > 0$ equazione iperbolica

Nel caso in esame quindi il segno di Δ dipende dai valori locali della velocità e della profondità, per cui il carattere della (5.1.9) può mutare da iperbolico a ellittico e viceversa entro la regione del moto.

In particolare l'equazione (5.1.9) ha carattere *iperbolico* nel caso *supercritico*

$$\frac{U^2}{gY} > 1$$

e carattere *ellittico* nel caso *subcritico*

$$\frac{U^2}{gY} < 1$$

con $U = (\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2)^{1/2}$ modulo del vettore velocità mediata sulla verticale.

Risolta la (5.1.9) in termini del potenziale medio, e quindi determinate le componenti \tilde{U} e \tilde{V} attraverso le (5.1.8a,b), la profondità Y si determina utilizzando il teorema di Bernoulli che si ricava dalle (5.1.6a,b) nella forma

$$gY + \frac{1}{2}(\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2) = c^2 + \frac{1}{2}U^2 = cost \quad (5.1.11)$$

c Analogia con i moti supersonici

Le equazioni della Gasdinamica sono le equazioni di stato, di continuità e del moto per un fluido ideale comprimibile che subisce una trasformazione politropica. Nel caso di moto piano esse assumono la forma

$$p = a\rho^k$$

$$(\rho U)_{,x} + (\rho V)_{,y} = 0$$

$$\rho(UU_{,x} + VU_{,y}) = -p_{,x}$$

$$\rho(UV_{,x} + VV_{,y}) = -p_{,y} \quad (5.1.12a, d)$$

dove ρ è la densità del fluido e p la pressione.

Il confronto fra le (5.1.12) e le (5.1.1) suggerisce un' *analogia fra i fenomeni supersonici che si presentano nella Gasdinamica e quelli supercritici caratteristici dei moti a superficie libera* posto che si istituiscano le seguenti corrispondenze

$$\frac{1}{\rho}(p_x, p_y) = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho}(\rho_x, \rho_y) = ak\rho^{k-2}(\rho_x, \rho_y) \Leftrightarrow g(Y_x, Y_y)$$

Posto dunque che risulti

$$k = 2 \qquad a = \frac{g}{2} \qquad (5.1.13a, b)$$

la corrispondenza sussiste nella forma:

$$\rho \Leftrightarrow Y \qquad p \Leftrightarrow \frac{gY^2}{2}$$

Si osservi che tale risultato vale solo nel caso bidimensionale e riguarda in un caso quantità puntuali, nell'altro grandezze mediate sulla verticale.

Tale analogia fu rilevata dal Prandtl (1931)¹, Riabouchinsky (1932)² e V. Karman (1938)³ e di essa è fatto uso sperimentalmente nel campo supersonico sulla scorta del lavoro originariamente proposto da Preiswerk (1938)⁴. Le applicazioni idrauliche sono state analizzate in una serie di successivi lavori da Knapp e Ippen⁵ anche sulla base del metodo grafico alle caratteristiche sviluppato nell'area della Gasdinamica da Busemann (1931)⁶.

d Procedimento di soluzione fondato sul metodo delle caratteristiche

Il carattere iperbolico della (5.1.9) nel caso supercritico implica l'esistenza nel piano (x, y) di due famiglie di linee, dette *caratteristiche*, in corrispondenza delle quali risulta indeterminato il problema di Cauchy.

¹Prandtl L. (1931) Abriss der Stromungslehre, Vieweg Verlag, Brunswick, Germany.

²Riabouchinsky D. (1934) Comptes rendus de l'Academie des Sciences, 195, 998.

³V. Karman T. (1938) Zeit. fur Ang. Math. und Mech., Berlin, 18, 49.

⁴Preiswerk E. (1938) E.T.H. Zurich, Mitteilungen aus dem Institut fur Aerodynamik, 7.

⁵Ippen A.T. e Knapp R.T. (1936) Trans. AGU, 17, 516; Knapp R.T. e Ippen A.T. (1938) 5th Int Congr. of Appl. Mech., Cambridge, Mass, 531; Ippen A.T. (1951) Trans. ASCE, 116, 268; Kanpp R.T. (1951) Trans. ASCE, 116, 296.

⁶Busemann A. (1931) 'Gasdinamik', Handbuch der Experimentalphysik, Leipzig.

Fisicamente le caratteristiche corrispondono a onde che si propagano trasportando informazioni dal contorno, su cui la soluzione deve essere nota, verso l'interno della regione considerata. Le equazioni delle caratteristiche, con le posizioni (5.1.10b,d), si scrivono

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{\tilde{U}\tilde{V} \pm c\sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2 - c^2}}{\tilde{U}^2 - c^2} \quad (5.1.14a, b)$$

Infatti la (5.1.9) può porsi nella forma *caratteristica* seguente

$$(\tilde{U}^2 - c^2)(\tilde{U}_{,x} + m\tilde{U}_{,y}) + \ell(\tilde{V}_{,x} + m\tilde{V}_{,y}) = 0 \quad (5.1.15)$$

posto che

$$(\tilde{U}^2 - c^2)m + \ell = 2\tilde{U}\tilde{V} \quad (5.1.16)$$

$$\ell m = \tilde{V}^2 - c^2 \quad (5.1.17)$$

donde

$$(\tilde{U}^2 - c^2)m^2 - 2\tilde{U}\tilde{V}m + \tilde{V}^2 - c^2 = 0 \quad (5.1.18)$$

Le soluzioni della (5.1.18) sono appunto della forma (5.1.14).

Dunque il problema differenziale alle derivate parziali originario si trasforma in corrispondenza delle caratteristiche nel seguente problema alle derivate totali

$$(\tilde{U}^2 - c^2)m \frac{d\tilde{U}}{dx} + (\tilde{V}^2 - c^2) \frac{d\tilde{V}}{dx} = 0 \quad m = \frac{dy}{dx} \quad (5.1.19a, b)$$

o, usando le (5.1.14),

$$\left(\tilde{U}\tilde{V} \pm c\sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2 - c^2}\right) \frac{d\tilde{U}}{dx} + (\tilde{V}^2 - c^2) \frac{d\tilde{V}}{dx} = 0 \quad (5.1.20)$$

Le (5.1.20) consentono di ottenere la soluzione del problema per \tilde{U} e \tilde{V} muovendo, a partire dal contorno, lungo le curve caratteristiche definite dalle (5.1.14).

È tuttavia più conveniente procedere utilizzando quali variabili il modulo della velocità media U e l'angolo θ formato con l'asse x dalla tangente locale alla linea di corrente (figura 5.2).

Detto χ l'angolo fra la tangente locale alla curva caratteristica e l'asse x , cioè posto

$$\tan(\chi) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = \frac{\tilde{U}\tilde{V} \pm c\sqrt{\tilde{U}^2 + \tilde{V}^2 - c^2}}{\tilde{U}^2 - c^2} \quad (5.1.21)$$

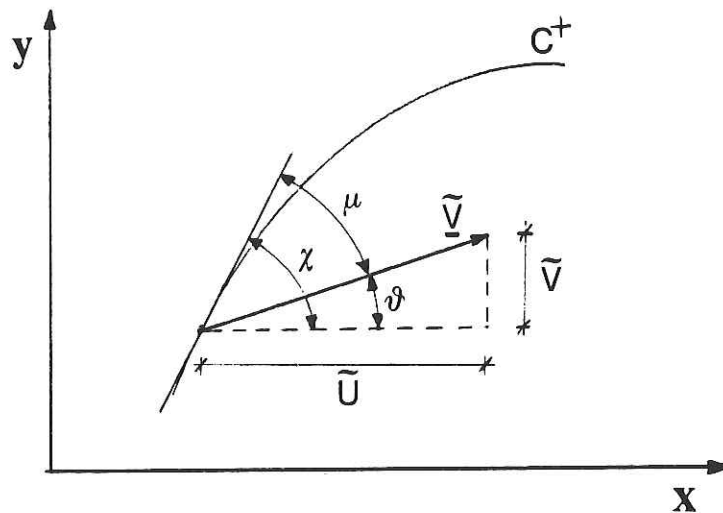


Figura 5.2:

e ricordando le relazioni

$$(\tilde{U}, \tilde{V}) = U(\cos \theta, \sin \theta) \quad (5.1.22a, b)$$

l'equazione delle caratteristiche (5.1.18) diventa

$$c^2 [1 + \tan^2(\chi)] = [\cos(\theta) \tan(\chi) - \sin(\theta)]^2 U^2 \quad (5.1.23)$$

e quindi

$$\frac{c^2}{U^2} = \sin^2(\chi - \theta) \quad (5.1.24)$$

Poiché c è a sua volta funzione di U attraverso la (5.1.11), e $(c^2/U^2) < 1$ nel caso supercritico, si può porre

$$\sin(\mu) = \frac{c}{U} \quad (5.1.25)$$

La (5.1.24) assume dunque la semplice forma

$$\chi = \theta \pm \mu \quad (5.1.26a, b)$$

cioè l'equazione delle curve caratteristiche, utilizzando quali variabili gli angoli θ e μ , si scrive

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pm} = \tan(\theta \pm \mu) \quad (5.1.27a, b)$$

Dunque le caratteristiche formano con la direzione locale del vettore velocità un angolo $\pm\mu$, detto *angolo di Mach*.

Ricaviamo ora la relazione che deve essere soddisfatta lungo le caratteristiche in termini delle variabili μ e θ . Ricavando m dalla (5.1.19a) e sostituendo nella (5.1.18) si ottiene

$$(\tilde{U}^2 - c^2) \left[\frac{(\tilde{V}^2 - c^2)^2 (d\tilde{V})^2}{(\tilde{U}^2 - c^2)^2 (d\tilde{U})^2} \right] + 2\tilde{U}\tilde{V} \frac{(\tilde{V}^2 - c^2) d\tilde{V}}{(\tilde{U}^2 - c^2) d\tilde{U}} + (\tilde{V}^2 - c^2) = 0 \quad (5.1.28)$$

donde

$$(\tilde{V}^2 - c^2)(d\tilde{V})^2 + 2\tilde{U}\tilde{V}d\tilde{V}d\tilde{U} + (\tilde{U}^2 - c^2)(d\tilde{U})^2 = 0 \quad (5.1.29a)$$

o

$$(\tilde{V}d\tilde{V} + \tilde{U}d\tilde{U})^2 = c^2 [(d\tilde{U})^2 + (d\tilde{V})^2] \quad (5.1.29b)$$

Differenziando le (5.1.22) e sostituendo nella (5.1.29) segue

$$(U^2 - c^2)(dU)^2 = c^2 U^2 (d\theta)^2 \quad (5.1.30)$$

donde

$$d\theta = \pm \left[\frac{U^2}{c^2} - 1 \right]^{1/2} \frac{dU}{U} \quad (5.1.31)$$

Affinché la (5.1.31) diventi una relazione fra θ e μ occorre utilizzare il teorema di Bernoulli (5.1.11) che fornisce

$$c^2 + \frac{U^2}{2} = gY_o + \frac{U_o^2}{2} = gY_o \left[1 + \frac{F_o^2}{2} \right] \quad (5.1.32)$$

con Y_o e U_o valori caratteristici della corrente indisturbata.

Si ha quindi

$$2cdc = -UdU \quad (5.1.33a)$$

o, ricordando la (5.1.25):

$$\frac{dU}{U} = -2 \frac{c}{U^2} dc = -2 \sin(\mu) \frac{dc}{U} = -2 \sin(\mu) \left[\sin(\mu) \frac{dU}{U} + \cos(\mu) d\mu \right] \quad (5.1.33b)$$

Ricavando dU/U dalla (5.1.33b) e sostituendo nella (5.1.31) con l'uso della (5.1.25) segue

$$d\theta \pm \left(\frac{1}{\sin^2(\mu)} - 1 \right)^{1/2} \frac{2 \sin(\mu) \cos(\mu)}{1 + 2 \sin^2(\mu)} d\mu = 0 \quad (5.1.34)$$

Integrando la (5.1.34) si ottiene infine

$$\theta \pm \int \frac{2 \cos^2(\mu) d\mu}{2 \sin^2(\mu) + 1} = \theta \pm P(\mu) = cost \quad (5.1.35)$$

dove

$$P(\mu) = \sqrt{3} \operatorname{arctg} [\sqrt{3} \tan(\mu)] - \mu \quad (5.1.36)$$

La funzione $P(\mu)$ è tabellata in tab. 5.1 dove, si noti, μ è un angolo espresso in gradi definito positivo e compreso fra 25° e 90° .

Concludendo, il procedimento di soluzione alle caratteristiche può riassumersi nella forma seguente

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = \tan(\theta + \mu) \quad \theta + P(\mu) = C_I \quad (\text{sulla } C^+) \quad (5.1.37a)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_- = \tan(\theta - \mu) \quad \theta - P(\mu) = C_{II} \quad (\text{sulla } C^-) \quad (5.1.37b)$$

$$(5.1.37c)$$

con $P(\mu)$ fornito dalla (5.1.36) (vedi tabella 5.1).

Istituito un reticolo alle caratteristiche e note opportune condizioni al contorno l'uso delle (5.1.37) consente di determinare θ e μ in ciascun nodo. Noto l'angolo μ si determinano c (quindi Y) e U attraverso le relazioni (5.1.25) e (5.1.32) che si riscrivono nella forma

$$U^2 = \left(\frac{1}{2} + \sin^2(\mu)\right)^{-1} gY_o \left(1 + \frac{F_o^2}{2}\right) \quad (5.1.38a)$$

$$c = U \sin(\mu) \quad (5.1.38b)$$

Segue la valutazione di \tilde{U} e \tilde{V} attraverso le (5.1.22).

Si noti che il procedimento può condurre a valori di $P(\mu)$ non compresi nell'intervallo 0-65.8846 ammissibile secondo la (5.1.36). Ciò accade se la corrente indisturbata è insufficientemente supercritica o quando le variazioni di geometria sono troppo brusche. In questo caso la corrente, per effetto delle variazioni di geometria, subisce localmente transizioni dallo stato supercritico allo stato subcritico sicché il procedimento alle caratteristiche non risulta più appropriato.

$\mu(^{\circ})$	$P(\mu)^{\circ}$	μ	$P(\mu)$	μ	$P(\mu)$	μ	$P(\mu)$
0	0	25	42.4231	50	61.1144	75	65.6530
1	1.994	26	43.6112	41	61.4838	76	65.6966
2	3.995	27	44.7574	52	61.8322	77	65.7343
3	5.984	28	45.8606	53	62.1603	78	65.7666
4	7.961	29	46.9220	54	62.4690	79	65.7938
5	9.925	30	47.9423	55	62.7591	80	65.8165
6	11.870	31	48.9223	56	63.0312	81	65.8350
7	13.795	32	49.8628	57	63.2861	82	65.8498
8	15.696	33	50.7647	58	63.5244	83	65.8613
9	17.570	34	51.6289	59	63.7469	84	65.8699
10	19.415	35	52.4564	60	63.9543	85	65.8761
11	21.228	36	53.2481	61	64.1472	86	65.8802
12	23.008	37	54.0050	62	64.3261	87	65.8827
13	24.750	38	54.7280	63	64.4918	88	65.8840
14	26.456	39	55.4181	64	64.6449	89	65.8845
15	28.121	40	56.0764	65	64.7859	89.999	65.8846
16	29.746	41	56.7037	66	64.9154		
17	31.329	42	57.3011	67	65.0340		
18	32.870	43	57.8695	68	65.1422		
19	34.367	44	58.4098	69	65.2406		
20	35.8204	45	58.9230	70	65.3297		
21	37.2295	46	59.4101	71	65.4010		
22	38.5942	47	59.8719	72	65.4819		
23	39.9146	48	60.3093	73	65.5461		
24	41.1908	49	60.7232	74	65.6029		

Tabella 5.1: La funzione $P(\mu)$.

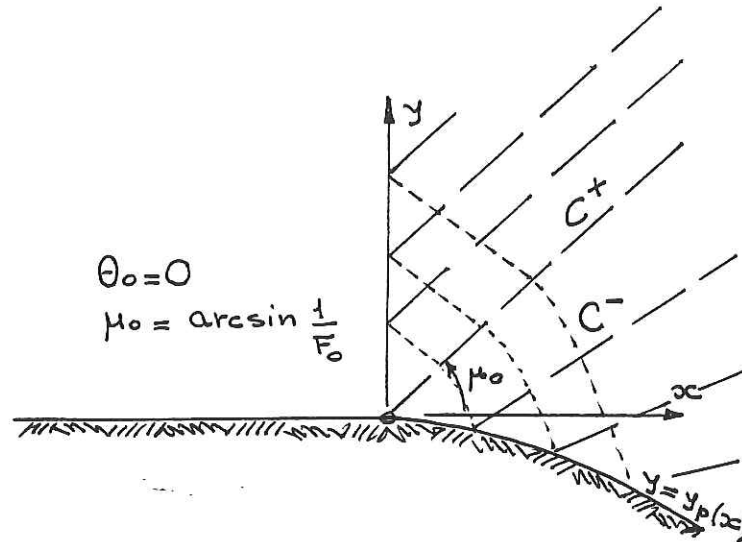


Figura 5.3:

5.2 Moti stazionari supercritici: applicazioni

a Onde prodotte da un graduale allargamento del canale

Esaminiamo anzitutto alcune soluzioni elementari del problema dette anche *onde semplici*.

Consideriamo il caso in cui una delle pareti del canale sia soggetta a una *graduale deviazione* dall'andamento rettilineo. Limitiamoci a considerare l'effetto di tale deviazione prescindendo dalle riflessioni delle perturbazioni sulla parete opposta. Vedremo nel seguito che ciò è lecito solo nella parte iniziale a valle della deviazione.

Nel caso in cui la deviazione si traduca in un graduale allargamento di sezione la configurazione è quella raffigurata in figura 5.3. A monte della deviazione il moto è uniforme con

$$\mu_0 = \arcsin\left(\frac{1}{F_0}\right) \quad \theta_0 = 0 \quad (5.2.1a, b)$$

Le caratteristiche C^- iniziano tutte nella sezione iniziale del tronco deviato e sono tali che:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_- = -\tan(\mu_0) \quad P(\mu) - \theta = P(\mu_0) \quad (5.2.2a, b)$$

In altre parole la variabile di Riemann $P(\mu) - \theta$ si mantiene costante in tutto il campo di moto.

Le caratteristiche C^+ sono tali che

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_+ = \tan(\mu_P + \theta_P) \quad P(\mu) + \theta = P(\mu_P) + \theta_P \quad (5.2.3a, b)$$

con P punto generico lungo la parete di equazione $y = y_p(x)$.

Facendo sistema fra le due relazioni (5.2.2b) e (5.2.3b) segue:

$$\theta = \frac{P(\mu_P) - P(\mu_o) + \theta_P}{2} \quad (5.2.4a)$$

$$P(\mu) = \frac{P(\mu_P) + P(\mu_o) + \theta_P}{2} \quad (5.2.4b)$$

Ma il valore di $P(\mu_P)$ può ottenersi utilizzando la (5.2.2b) particolarizzata lungo la parete:

$$P(\mu_P) = P(\mu_o) + \theta_P \quad (5.2.5)$$

Dalle (5.2.4) e (5.2.5) segue che su ciascuna caratteristica positiva valgono le relazioni

$$\theta = \theta_P \quad \mu = \mu_P \quad (5.2.6a, b)$$

con μ_P ottenibile dalla (5.2.5).

Poiché l'angolo θ_P si ottiene dalla equazione della curva $y = y_p(x)$, la soluzione complessiva nel punto generico di coordinate (x, y) è retta dalle equazioni

$$y = y_P(\zeta) + (x - \zeta) \tan(\theta_P + \mu_P) \quad P(\mu_P) = P(\mu_o) + \theta_P$$

$$\theta = \theta_P(\zeta) \quad \mu = \mu_P \quad (5.2.7a, d)$$

con ζ coordinata x del punto di origine della C^+ sulla parete. Noti θ e μ si ricavano quindi Y e U utilizzando le (5.1.38a,b).

Si osserva come le caratteristiche C^+ , che sono delle rette perché i valori di μ e θ si mantengono costanti (vedi le (5.2.6)), siano caratterizzate da valori decrescenti di μ_P al crescere di ζ . Ciò implica che, sulla base della (5.2.3a) e delle (5.1.38a,b) le caratteristiche C^+ vanno divergendo e sono caratterizzate da valori costanti del modulo della velocità e della profondità, rispettivamente crescenti e decrescenti procedendo verso valle.

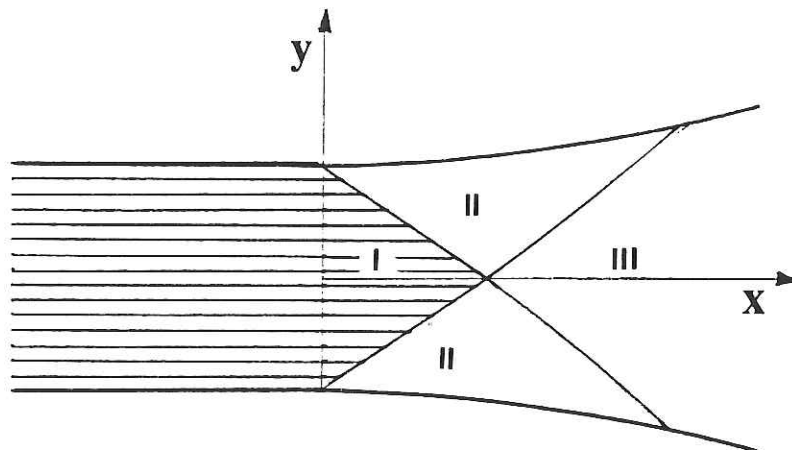


Figura 5.4:

La soluzione ottenuta in precedenza è significativa solo in assenza di una seconda parete ed è valida nella regione posta a valle della caratteristica C^+ , di equazione

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = \tan(\mu_0) \quad (5.2.8)$$

che ha origine in corrispondenza della parete nella sezione iniziale del tronco deviato. Essa delimita a monte la regione nella quale la corrente permane indisturbata perché in tale regione anche le caratteristiche C^+ hanno origine a partire dalla sezione iniziale del tronco deviato.

Nella realtà la presenza della parete opposta implica una riflessione delle onde oblique e un'interferenza fra le onde emesse dalle due pareti. Nel caso di un graduale allargamento del canale del tipo in figura 5.4 segue quindi che la corrente permane indisturbata nella regione indicata con I, si comporta come nel caso appena discusso nella regione indicata con II (regione di onda semplice), mentre presenta nella regione III un comportamento che è il risultato della interferenza delle onde provenienti dalle due pareti. L'analisi di questo problema si esegue utilizzando le (5.1.37, 5.1.38).

b Sopraelevazione indotta in canali curvi

Calcoliamo ora la sopraelevazione indotta in *correnti supercritiche ad asse curvilineo con debole curvatura* (figura 5.5).

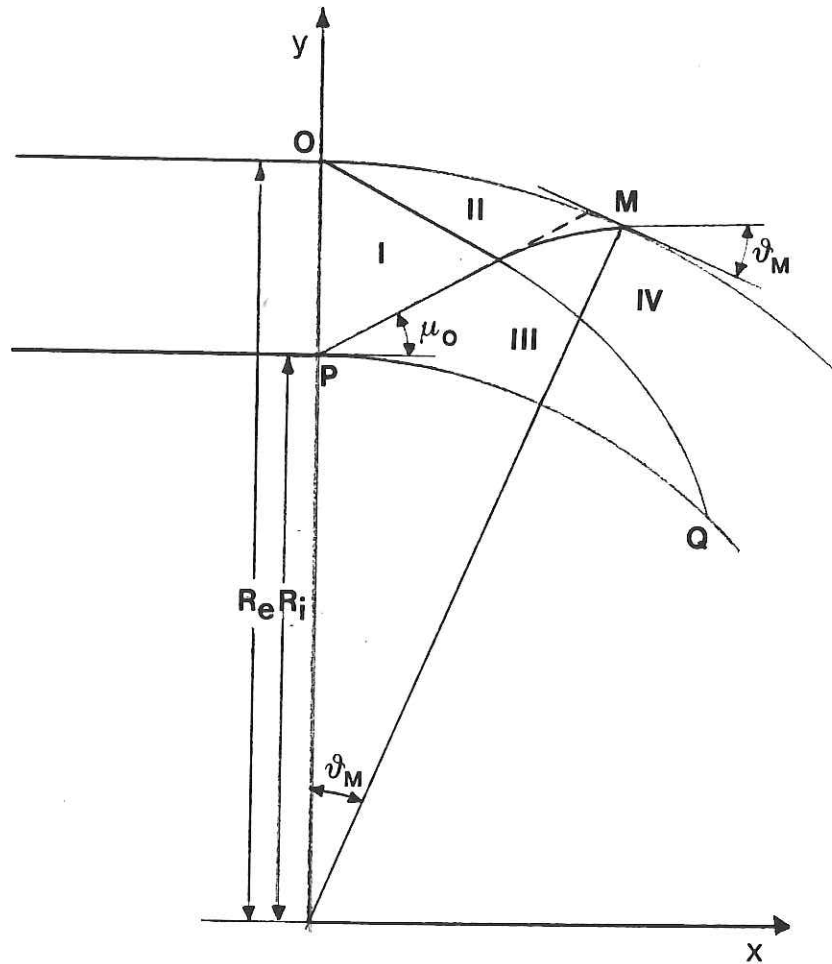


Figura 5.5:

È questo un caso in cui coesistono i comportamenti tipici delle correnti in espansione con quelli delle correnti in contrazione. E' anche qui possibile distinguere diverse regioni nel campo di moto.

Regione I

Si ha

$$\theta = 0 \quad \mu = \mu_0 = \arcsin\left(\frac{1}{F_0}\right) \quad (5.2.9a, b)$$

Le linee di corrente si mantengono qui rettilinee fino alla frontiera individuata dalle due caratteristiche OQ e PM.

Regione II

Le caratteristiche C^+ sono tali che

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_+ = \tan(\mu_o) \quad (5.2.10a)$$

$$P(\mu_o) = P(\mu) + \theta \quad (5.2.10b)$$

In particolare consideriamo il tratto di parete esterna OM. Qui θ è negativo e va crescendo in modulo sicché anche μ va crescendo raggiungendo il massimo in M. Infatti si ha

$$P(\mu_M) = P(\mu_o) - \theta_M \quad (5.2.10c)$$

Dunque, per le (5.1.38a,b), la profondità assume valori crescenti procedendo da O verso M lungo la parete esterna: nel punto M si realizza la massima sopraelevazione della superficie libera.

La valutazione di Y_M richiederebbe uno studio numerico dell'andamento delle caratteristiche nella regione II. Tuttavia una stima di θ_M , e quindi di μ_M e Y_M , può essere effettuata assumendo in prima approssimazione che PM sia una retta con pendenza μ_o (linea tratteggiata). Ciò è evidentemente corretto fino al punto di intersezione con la caratteristica C^- (OQ).

Con riferimento alla figura 5.5, si ha allora

$$\frac{y_M - R_i}{x_M} \cong \tan(\mu_o) \quad \frac{x_M}{y_M} = -\tan(\theta_M) \quad (5.2.11a, b)$$

donde

$$\tan(\theta_M) = -\left[\tan(\mu_o) + \frac{R_i}{x_M}\right]^{-1} = -\left[\tan(\mu_o) + \frac{R_i}{R_e} \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\theta_M)}}\right]^{-1} \quad (5.2.12)$$

avendo utilizzato l'equazione della circonferenza esterna

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{R_e^2}{x^2} - 1 \quad (5.2.13a)$$

che, usando la (5.2.11b), implica:

$$\left[\tan^2(\theta_M)\right]^{-1} = \frac{R_e^2}{R_i^2} \left(\frac{R_i}{x_M}\right)^2 - 1 \quad (5.2.13b)$$

Dalla (5.2.12) segue:

$$\left(\frac{R_i}{R_e}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{\tan^2(\theta_M)}\right] = \left[\frac{1}{\tan(\theta_M)} + \tan(\mu_o)\right]^2 \quad (5.2.14a)$$

cioè

$$[\tan(\theta_M)]^{-2} \left(1 - \frac{R_i^2}{R_e^2}\right) + [\tan(\theta_M)]^{-1} [2 \tan(\mu_o)] - \left(\frac{R_i}{R_e}\right)^2 + \tan^2(\mu_o) = 0 \quad (5.2.14b)$$

e quindi

$$[\tan(\theta_M)]^{-1} = \frac{-\tan(\mu_o) - (R_i/R_e)\sqrt{\tan^2(\mu_o) + 1 - (R_i/R_e)^2}}{1 - (R_i/R_e)^2} \quad (5.2.15)$$

dove si è scelta la soluzione con il segno - sulla base del comportamento della soluzione per $R_i \Rightarrow R_e$. Si ha infatti $\tan(\theta_M) \Rightarrow 0$ per $R_i \Rightarrow R_e$, risultato ragionevole perché per $R_i \Rightarrow R_e$ il punto M si sposta verso O .

Per $R_i \Rightarrow 0$ la (5.2.15) predice correttamente

$$\tan(\theta_M) = -\frac{1}{\tan(\mu_o)} \quad (5.2.16)$$

perché il centro di curvatura coincide con il punto P .

Noto l'angolo θ_M , la (5.2.10c) consente di valutare μ_M e le (5.1.38a,b) forniscono U_M e Y_M . Si noti che la stima di Y_M così effettuata fornisce un'approssimazione per difetto della massima profondità lungo la sponda esterna perché θ_M risulta sottostimato se si assume che la caratteristica PM sia una retta. Si noti inoltre che le caratteristiche C^- che si dipartono da OM costituiscono un fascio di rette convergenti: ciò è caratteristica peculiare delle correnti in contrazione.

Regione III

In tale regione si applica la soluzione d'onda semplice descritta al punto a (graduale allargamento), cioè lungo l'arco PQ la profondità va decrescendo. Inoltre, poiché lungo PQ θ è negativo e crescente in modulo e μ è positivo e decrescente, la pendenza delle linee caratteristiche C^+ che si dipartono da PQ è decrescente, cioè tali caratteristiche costituiscono un fascio divergente.

Regione IV

La configurazione che si realizza in tale regione è il risultato dell'interferenza delle onde provenienti dalle due pareti. Si noti, in particolare, che la profondità lungo la sponda esterna a valle del punto M si riduce per effetto delle onde negative provenienti dalla sponda interna. Il problema va affrontato numericamente utilizzando le (5.1.37) e (5.1.38).

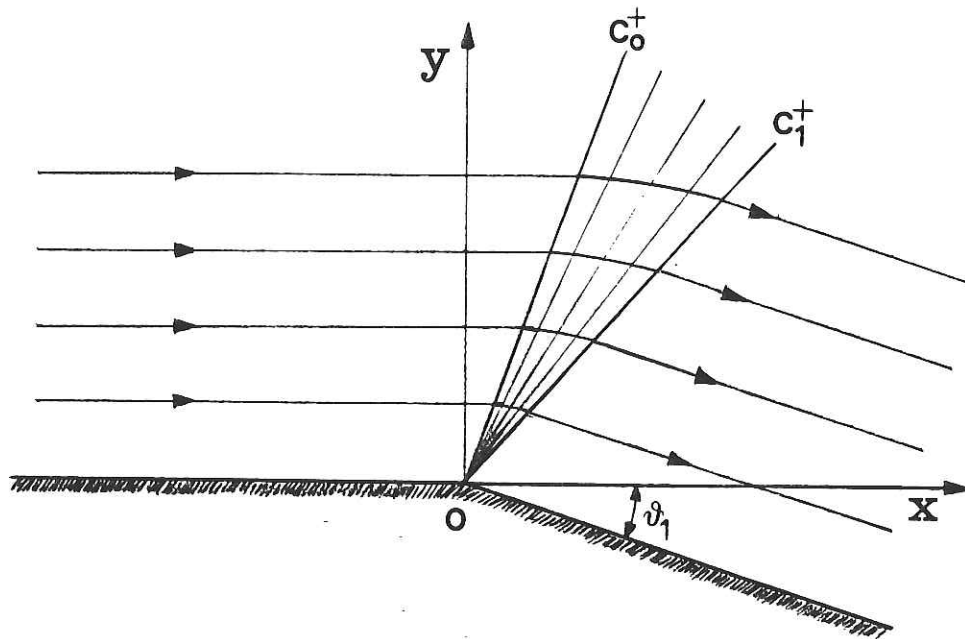


Figura 5.6:

c Brusca deviazione della parete: ventaglio di Prandtl-Meyer

Il caso limite della brusca deviazione della parete è rappresentato in figura 5.6 ed è noto come *ventaglio di Prandtl-Meyer* nella Gasdinamica.

Nel generico punto di coordinate (x, y) rispetto al riferimento in figura 5.6, appartenente alla generica caratteristica uscente dal punto O, si ha

$$\frac{y}{x} = \tan(\theta + \mu) \quad (5.2.17a)$$

$$P(\mu) - \theta = P(\mu_0) \quad (5.2.17b)$$

Le relazioni precedenti consentono di valutare θ e μ in ciascun punto interno al 'ventaglio' limitato dalle due caratteristiche C_0^+ e C_1^+ , definite dalla (5.2.17a) con $(\theta = 0, \mu = \mu_0)$ e $(\theta = \theta_1, \mu = \mu_1)$ rispettivamente, essendo μ_1 fornito dalla (5.2.17b) con $\theta = \theta_1$. A monte della caratteristica C_0^+ la corrente permane indisturbata. È facile mostrare che in tutta la regione a valle della caratteristica C_1^+ risulta essere $\theta = \theta_1$ e $\mu = \mu_1$.

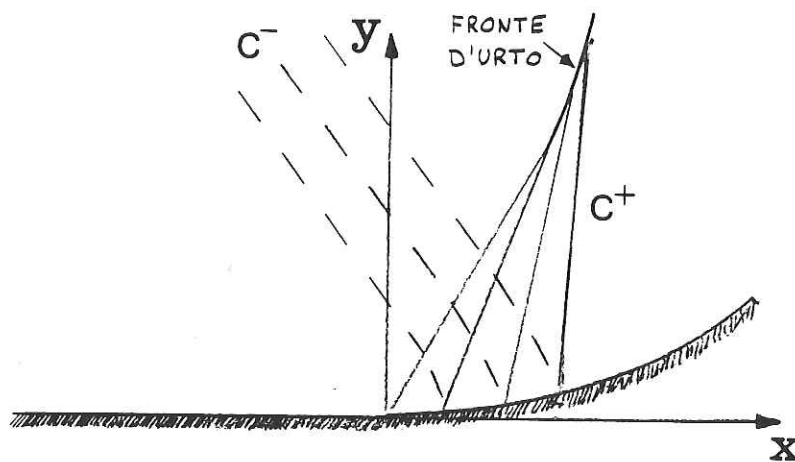


Figura 5.7:

d Graduale restringimento: il risalto (urto) obliquo

Consideriamo ora il caso più complesso in cui la parete devia in modo da dar luogo a un *graduale restringimento*. In questo caso, come già osservato nel punto b, le caratteristiche che si dipartono dalla parete convergono. Tendono dunque a formarsi regioni in cui le caratteristiche si addensano in modo tale da produrre rapidissime variazioni di quota in tronchi brevissimi. Esse sono interpretabili come *discontinuità* e sono denominati *urti* o *fronti d'urto* ('shocks' in Gasdinamica) (figura 5.7).

In tale situazione lo schema teorico che ha condotto all'uso del procedimento alle caratteristiche cade in difetto poiché, in prossimità dell'urto, le dissipazioni di energia risultano significative e inoltre le grandezze che caratterizzano il moto presentano discontinuità lungo i fronti d'urto.

Il caso limite della situazione illustrata in figura 5.7 appare in figura (5.8a) e si verifica in presenza di una *brusca deviazione* della parete tale da indurre *restringimento della corrente*. In questo caso un graduale passaggio dalle condizioni di monte a quelle di valle attraverso un moto alla Prandtl-Meyer, quale raffigurato in figura (5.8a), implicherebbe tre diversi valori di velocità (e profondità) in ciascun punto interno al ventaglio: è cioè impossibile fisicamente. La situazione che si verifica nella realtà è quella descritta in figura (5.8b).

Si ha dunque un urto che muove dallo spigolo della parete con inclinazione

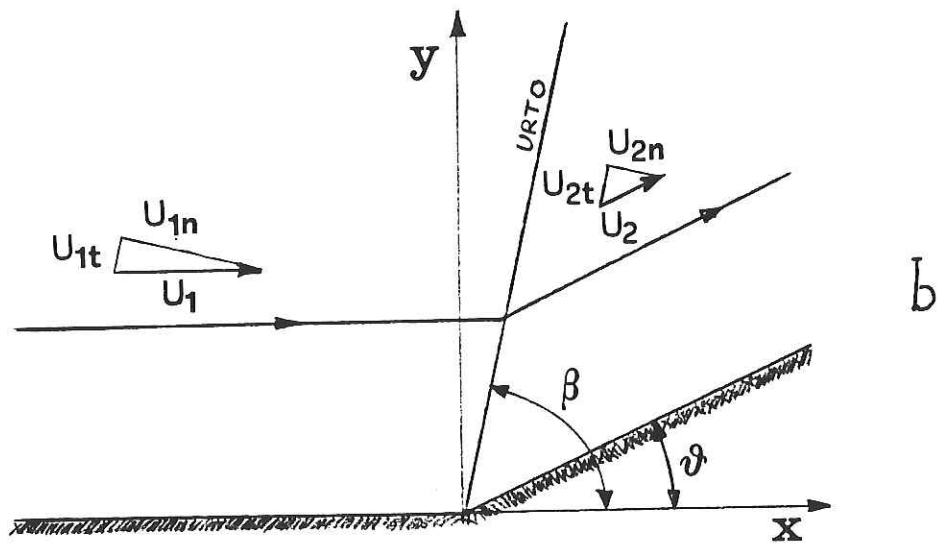
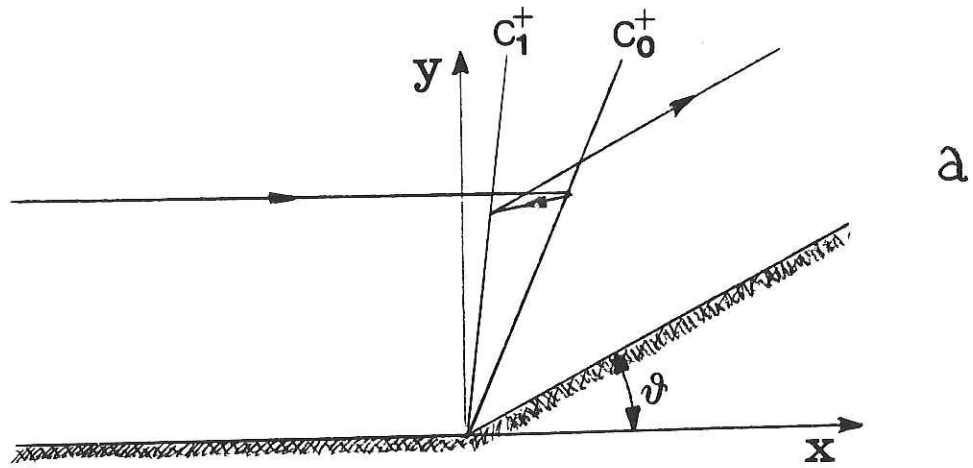


Figura 5.8:

che può dimostrarsi essere compresa fra quelle delle due linee di Mach C_0^+ e C_1^+ della figura 5.8a.

La soluzione in corrispondenza del fronte della perturbazione può determinarsi attraverso una trattazione simile a quella adottata per lo studio del risalto idraulico. Dato il carattere obliquo del risalto è necessario applicare il principio della quantità di moto nelle direzioni normale e tangenziale rispetto al fronte.

Le velocità U_1 e U_2 a monte e valle del fronte vengono decomposte nelle componenti U_{1n} , U_{1t} e U_{2n} , U_{2t} rispettivamente. Le equazioni di continuità e della quantità di moto, nelle direzioni normale e tangenziale all'urto, si scrivono rispettivamente

$$Y_1 U_{1n} = Y_2 U_{2n} \quad (5.2.18)$$

$$\rho g \frac{Y_1^2}{2} + \rho U_{1n}^2 Y_1 = \rho g \frac{Y_2^2}{2} + \rho U_{2n}^2 Y_2 \quad (5.2.19)$$

$$U_{1t} = U_{2t} \quad (5.2.20)$$

La (5.2.19), tenendo conto dell'equazione di continuità (5.2.18), fornisce U_{1n} (o U_{2n}) in funzione di Y_1 e Y_2/Y_1 nella forma

$$U_{1n} = \sqrt{g Y_1} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{Y_2}{Y_1} \left(1 + \frac{Y_2}{Y_1}\right)} \quad (5.2.21)$$

Indicato con β l'angolo che la linea d'urto forma con la direzione originaria del moto, si ha

$$U_{1n} = U_1 \sin(\beta) \quad (5.2.22)$$

Introducendo il numero di Froude della corrente di monte $F_1 (= U_1/\sqrt{g Y_1})$, la (5.2.19) fornisce una relazione per (Y_2/Y_1) nella forma:

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + 8 F_1^2 \sin^2(\beta)} \right] \quad (5.2.23)$$

La (5.2.23) si riduce alla classica espressione per il risalto idraulico nelle correnti 1-D quando $\beta = \pi/2$.

Infine la (5.2.20) può porsi nella forma

$$\frac{U_{1n}}{\tan(\beta)} = \frac{U_{2n}}{\tan(\beta - \theta)} \quad (5.2.24)$$

donde, utilizzando la (5.2.18), segue:

$$\frac{Y_2}{Y_1} = \frac{\tan(\beta)}{\tan(\beta - \theta)} \quad (5.2.25)$$

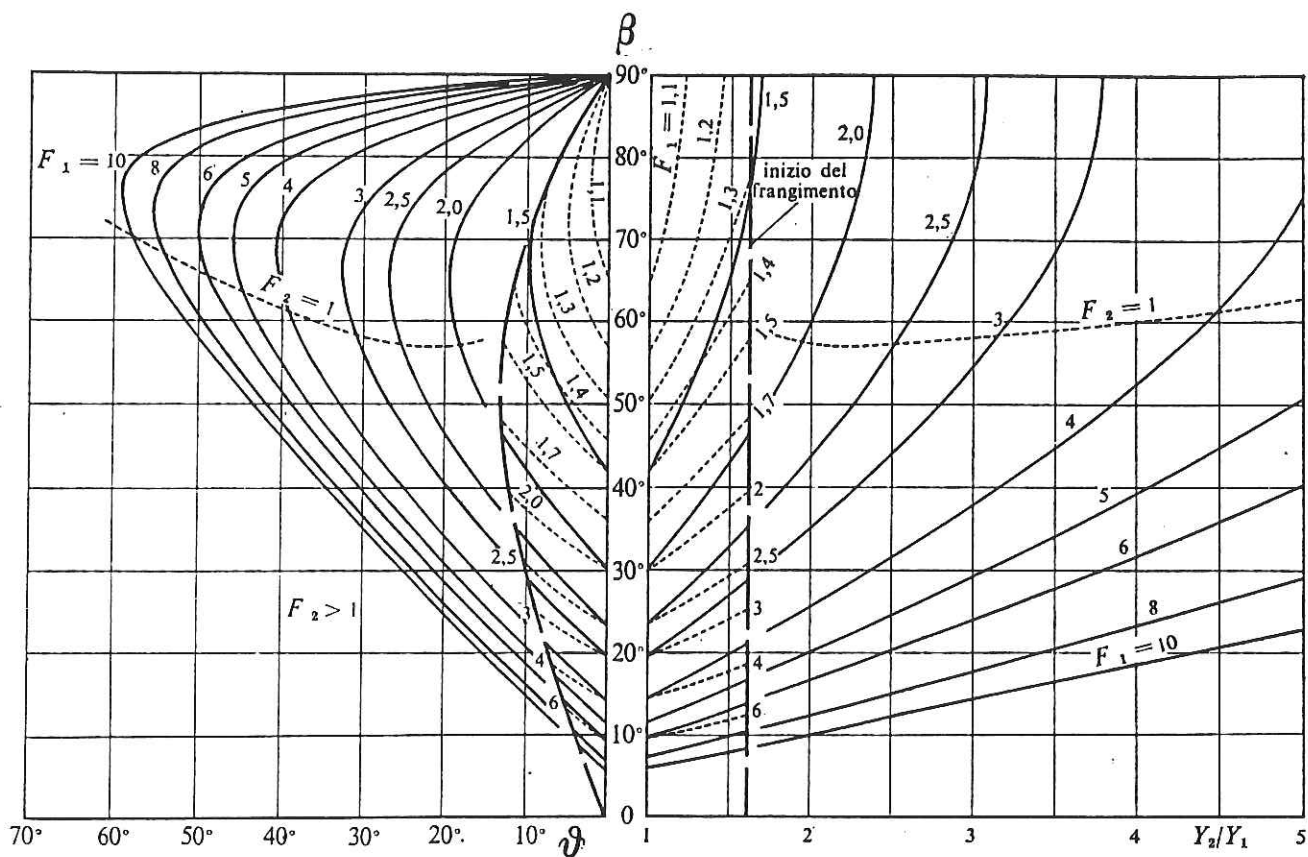


Figura 5.9: Grafico per la determinazione dell'angolo di Mach β , e della profondità di valle Y_2 partendo dalla conoscenza della deviazione θ e delle caratteristiche della corrente a monte.

Data dunque una corrente di assegnato numero di Froude F_1 e profondità Y_1 le (5.2.23) e (5.2.25) consentono di valutare il rapporto (Y_2/Y_1) e l'inclinazione β del fronte d'urto, noto l'angolo θ di brusca deviazione della parete. La continuità consente quindi di valutare U_2 e il numero di Froude di valle.

Il grafico di figura 5.9 rappresenta i risultati nella forma introdotta da Ippen (1951).

Alcune osservazioni sulla figura 5.9 sono di qualche rilievo:

- i) Per ogni F_1 esiste un valore massimo θ_{\max} dell'angolo di deviazione della parete al di sopra del quale la configurazione di figura (5.8b),

con l'urto emanato dallo spigolo, non può più realizzarsi. Vedremo nel seguito quale configurazione di moto si presenta in questo caso.

- ii) Per ogni F_1 e $\theta < \theta_{\max}$ esistono due possibili soluzioni per β e (Y_2/Y_1) , per lo più (anche se non sempre) corrispondenti una a condizioni supercritiche, l'altra a condizioni subcritiche a valle dell'urto. La seconda, cui sono associati i valori più elevati dell'angolo d'urto β e valori relativamente grandi del rapporto (Y_2/Y_1) , è detta di *urto forte*; la prima, cui sono associati valori relativamente bassi dell'angolo d'urto e del rapporto (Y_2/Y_1) , è detta di *urto debole*. Si pone dunque la questione di predire quale delle due soluzioni si verifichi nella realtà.
- iii) Quando la corrente di monte si trova in condizioni prossime alle critiche l'urto non si manifesta nella forma di un risalto diretto bensì di un risalto ondulato. La condizione limite perché ciò si verifichi è esprimibile nella forma

$$F_1 \sin(\beta) \leq 1.28 \quad (5.2.26)$$

Inoltre le caratteristiche del risalto ondulato possono stimarsi semplicemente assumendo che la velocità normale al fronte d'urto U_{1n} coincida con la celerità di propagazione del risalto ondulato, rendendo così l'assetto di quest'ultimo stazionario. Essendo la celerità del risalto con buona approssimazione pari a $(gY_2)^{1/2}$, con Y_2 profondità al colmo della prima onda, segue

$$U_1 \sin(\beta) = \sqrt{gY_2} \quad (5.2.27a)$$

La (5.2.27a) riscritta nella forma

$$\sin(\beta) = \frac{1}{F_1} \sqrt{\frac{Y_2}{Y_1}} \quad (5.2.27b)$$

insieme alla (5.2.25), che continua a vigere, consente di determinare (Y_2/Y_1) e β per assegnati θ e F_1 . I risultati sono riportati nella figura 5.9 con linee punteggiate. La condizione limite (5.2.26) (e la corrispondente $(Y_2/Y_1) \leq 1.6$) sono raffigurate con curve tratteggiate. Esiste una modesta zona di incertezza alla sovrapposizione fra le due soluzioni. Tale striscia di sovrapposizione corrisponde al caso in cui il risalto è ondulato con frangimento.

e Risalto (urto) debole o forte?

Restano da chiarire le questioni i) e ii) poste al punto precedente.

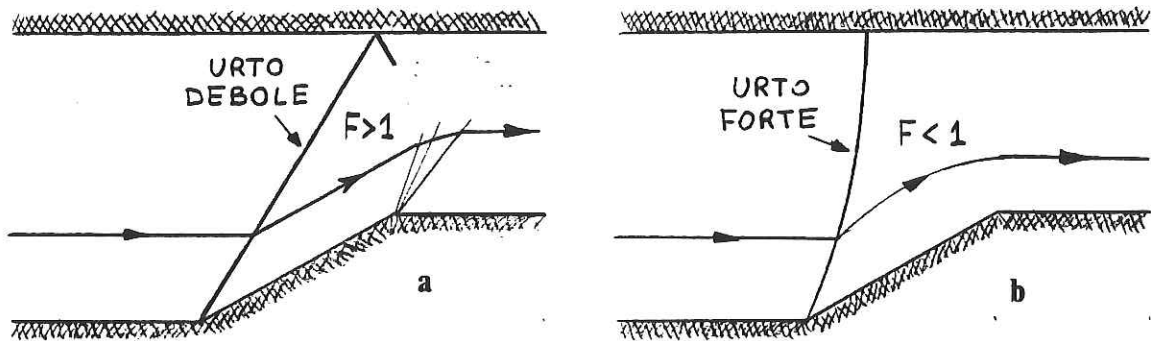


Figura 5.10:

Per comprendere la scelta operata dalla corrente fra urto debole e urto forte, e il suo comportamento quando θ eccede θ_{\max} , esaminiamo anzitutto il caso limite in cui $\theta \Rightarrow 0$ (corrente rettilinea).

In questo caso la soluzione di urto debole corrisponde ad un'onda di ampiezza infinitesima ($\beta = \arcsin(1/F_1)$), mentre quella di urto forte rappresenta il classico risalto diretto disposto ortogonalmente alla direzione del moto ($\beta = \pi/2$). Se le condizioni di valle impongono una corrente lenta si realizzerà l'urto forte, viceversa se le condizioni di valle sono supercritiche non si realizzerà alcun urto.

Generalizzando le considerazioni precedenti si può affermare che la scelta fra urto debole e forte dipende primariamente dalle condizioni di valle. I due casi sono rappresentati nella figura 5.10.

Si noti come mentre nel caso (a) l'urto, essendo debole, si mantiene obliquo fino alla parete opposta, nel caso (b) esso si incurva fino a disporsi ortogonale rispetto alla parete opposta. È questa una norma generale per gli urti forti. Peraltro nel caso (a) l'urto obliquo si riflette lungo la parete superiore mentre ciò non accade nel caso (b). Vedremo nel seguito le regole per la riflessione e interazione degli urti obliqui.

Veniamo infine a esaminare il caso in cui $\theta > \theta_{\max}$. Il moto non consente la formazione di un urto obliquo uscente dal vertice in cui è localizzata la discontinuità: si osserva sperimentalmente che l'urto si distacca allora dal vertice (figure 5.11a,b). Quando ciò si verifica l'urto risulta sempre curvo e va variando di intensità dando luogo, a valle, a una regione in cui il moto da subcritico tende a tornare supercritico al ridursi dell'intensità dell'urto.

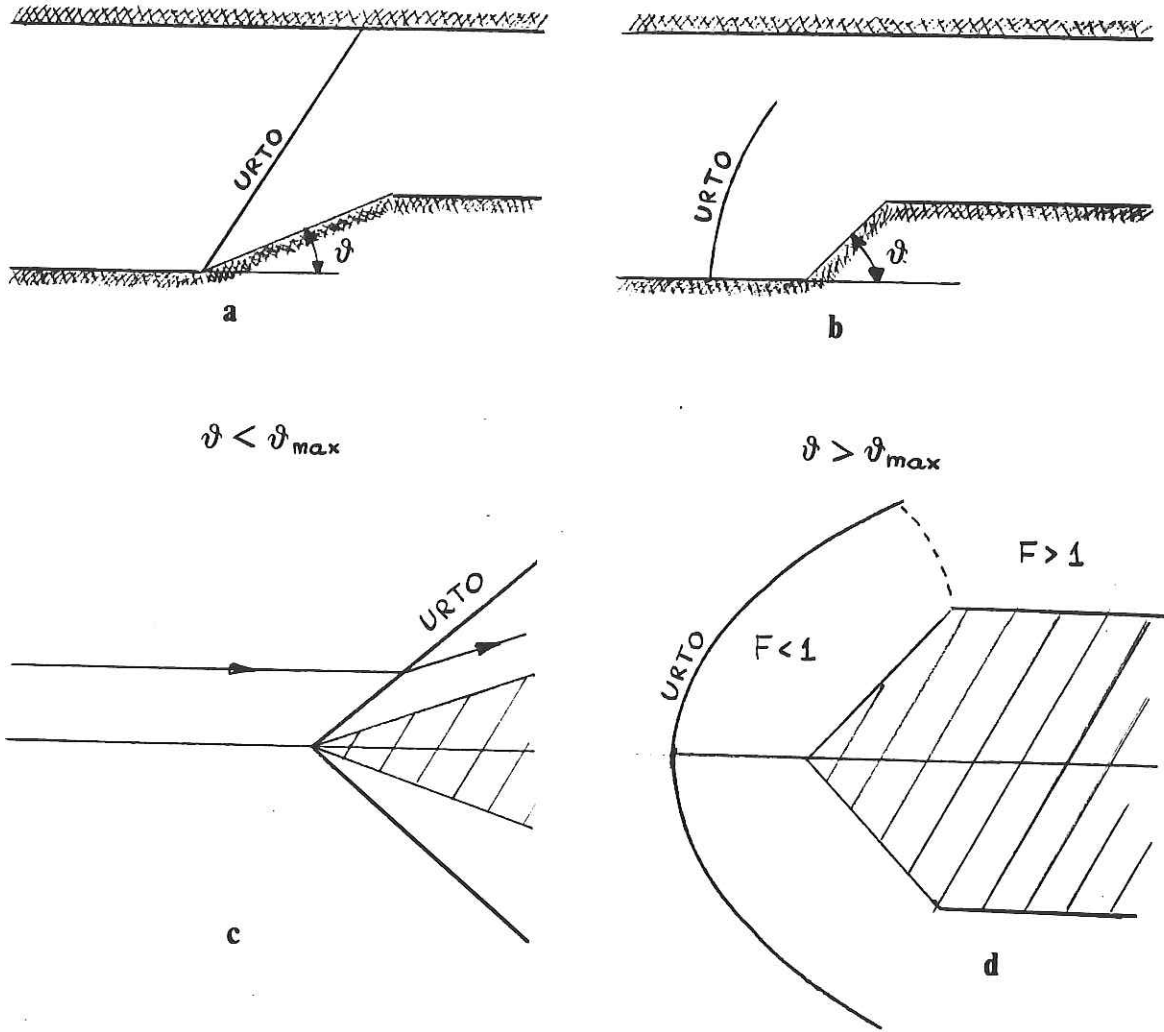


Figura 5.11:

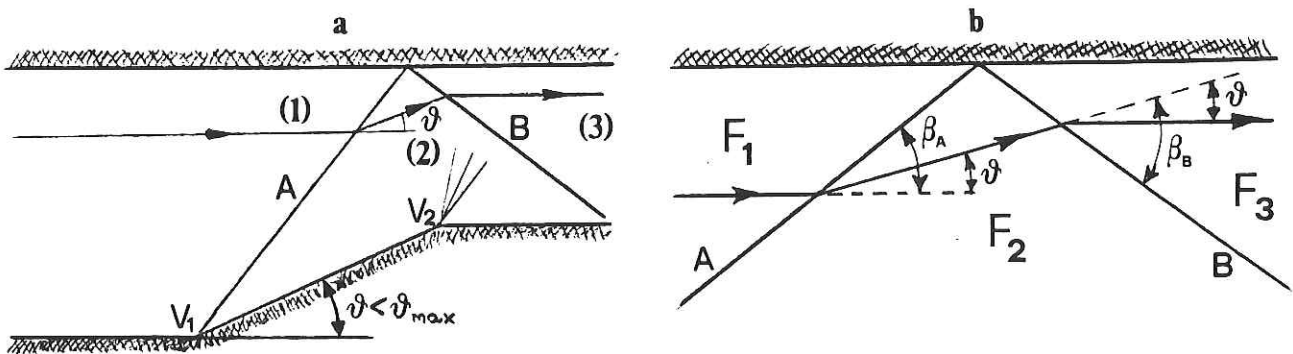


Figura 5.12:

Configurazione di moto del tutto analoga si verifica a monte di un ostacolo interposto in una corrente supercritica (figure (5.11c,d)). La coesistenza di regioni di moto subcritiche e supercritiche rende l'analisi di queste configurazioni di moto assai complessa.

Esaminiamo alcuni aspetti dell'interazione fra onde d'urto e pareti (figura 5.12a).

L'urto A incide su una parete piana. Dato l'assunto carattere ideale del moto è necessario che l'urto B sia riflesso in modo tale che la corrente nella regione (3) abbia la stessa direzione che presenta nella regione (1). La figura (5.12b) mostra che l'angolo β_B può ricavarsi, secondo il procedimento descritto al punto d, come associato ad una corrente di monte, caratterizzata dal numero di Froude F_2 , che subisce una brusca deviazione con angolo di deviazione della parete relativo alla direzione della velocità pari a θ . Calcolato β_B utilizzando la figura 5.9. è immediato valutare le caratteristiche della corrente nella regione.

Alcune considerazioni a proposito di questo semplice procedimento di valutazione delle caratteristiche dell'onda d'urto riflessa si rivelano necessarie.

Anzitutto può facilmente dedursi che esiste, per ogni assegnato F_1 , un valore massimo θ_{\max}^R di θ oltre il quale una riflessione del tipo di quella proposta in figura (5.12a) risulta impossibile. Per determinare tale angolo limite è sufficiente calcolare il valore di θ_{\max} associato al coniugato F_2 di F_1 secondo le relazioni dell'urto obliquo. La figura 5.13 mostra i risultati di tale analisi. Per valori di θ superiori a θ_{\max}^R una riflessione regolare è impossibile e cede il posto a quella che è nota come *riflessione di Mach*.

In realtà la presenza di effetti dissipativi alle pareti rende anche la riflessione regolare un pò più complessa di quanto emerge dal presente schema.

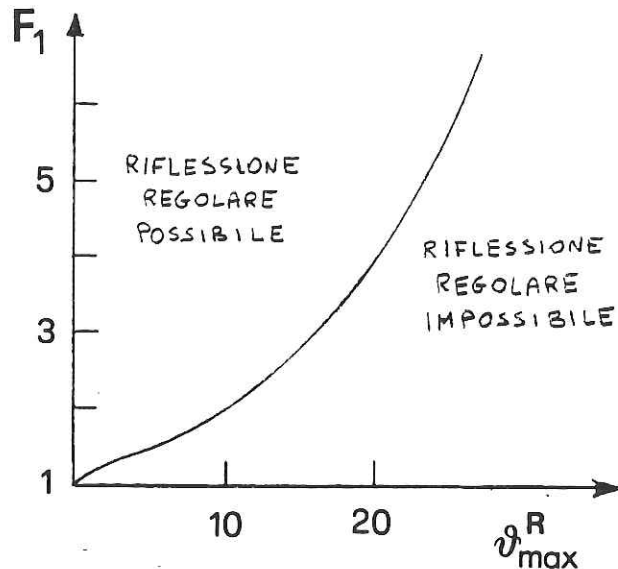


Figura 5.13:

Si noti inoltre che nell'esempio in figura (5.12b) si pone anche la questione di valutare l'interazione fra il ventaglio di Prandtl-Meyer emesso dal vertice V_2 e l'urto B.

Esaminiamo ora l'interazione reciproca fra onde d'urto oblique.

Consideriamo due urti obliqui A e B emanati dai vertici V_1 e V_2 e assumiamo che essi si intersechino in V (figura 5.14). Se A e B continuano in C e D, le linee di corrente nella regione (2) deflettono di un angolo θ_2 per riportarsi successivamente, nella regione (3''), ad essere parallele alla direzione originaria. Analogamente si comportano le linee di corrente uscenti dall'urto A.

È però evidente che, se $\theta_1 \neq \theta_2$, i numeri di Froude F_1 e F_2 , dipendenti dagli angoli β_A e β_B rispettivamente, differiscono fra loro e conseguentemente differiscono fra loro F_3' e F_3'' oltre che Y_3' e Y_3'' che dipendono dagli angoli $(\beta_A + \theta_2)$ e $(\beta_B + \theta_1)$ rispettivamente. Si forma così una linea di discontinuità uscente da V che dà origine a uno *strato vorticoso*, una striscia cioè in cui si concentra vorticità associata alla rapida variazione della velocità attraverso lo strato stesso.

Come nel caso della riflessione da una parete piana anche in questo caso, se F_0 risulta troppo piccolo o θ_1, θ_2 troppo grandi, una riflessione regolare

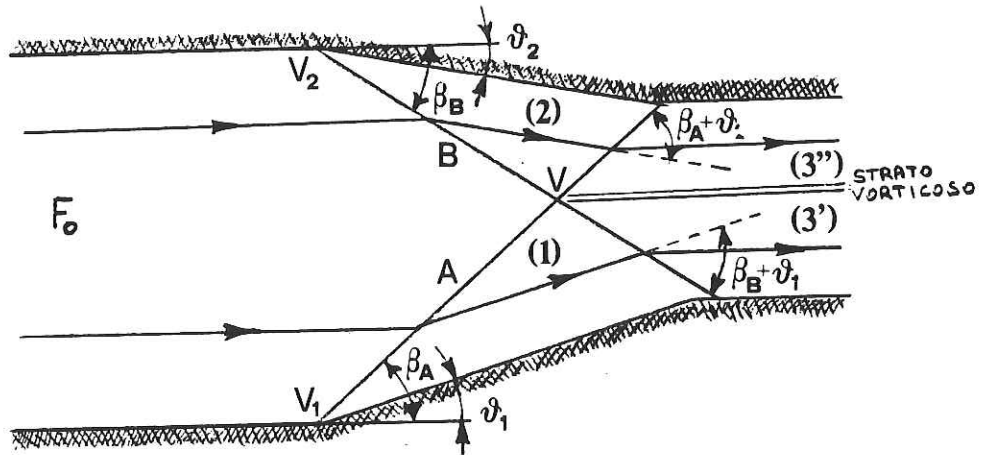


Figura 5.14:

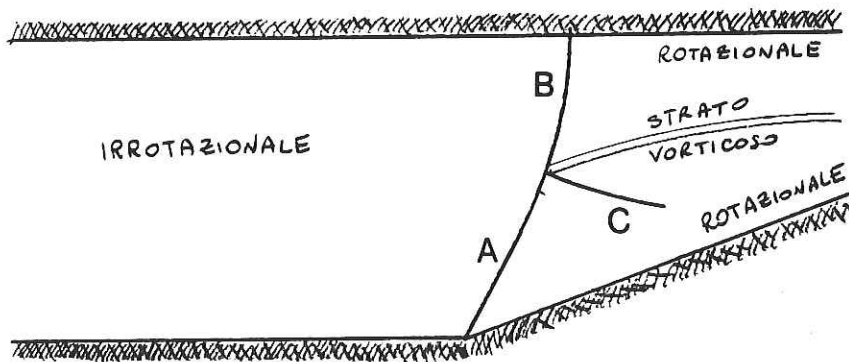


Figura 5.15:

risulta impossibile: si verifica allora una *riflessione detta di Mach*.

Descriviamo infine qualitativamente i caratteri di una *riflessione di Mach*, quali emergono in Aerodinamica Supersonica, per la configurazione in figura 5.12.

Se $\theta > \theta_{\max}^R$ l'urto sulla parete superiore non può che risultare ad essa ortogonale affinché la velocità in prossimità della parete non cambi direzione (figura 5.15). L'urto incidente A e quello normale alla parete B si intersecano dando luogo ad un urto riflesso C. Tuttavia per la stessa ragione per cui una riflessione regolare non risultava possibile alla parete, gli urti B, C ed A in prossimità del punto di intersezione non possono risultare rettilinei bensì curvi.

Ne consegue in particolare che il moto di valle non può essere irrotazionale ma deve risultare rotazionale. In particolare uno strato vorticoso separa le regioni a valle degli urti B e C. Lo studio quantitativo di questo fenomeno risulta molto complesso e tuttora non perfettamente noto.