

LEZIONE 6

A-18 4.2

28/9/16 (1)

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $v_1, \dots, v_k \in V$ fissati.

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ $\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k}_{\text{C.L. di } v_1, \dots, v_k} \in V$ (unica vettore)

$\{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$ SPIEGARE COSA SIGNIFICA

È l'insieme di tutte le combinazioni lineari che si possono fare con $v_1, \dots, v_k$. Lo indicheremo con

$\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ (spanned) = generated

$\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è sottospazio vettoriale di V

Suffici.

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ arbitrari

$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R} \quad \forall i, \forall j$

("LAVORO" in V)

$(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k) =$ per le "(1)"

$\underbrace{(\alpha_1 + \beta_1)}_{\in \mathbb{R}} v_1 + \dots + \underbrace{(\alpha_k + \beta_k)}_{\in \mathbb{R}} v_k \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \quad \lambda \in \mathbb{R}$ arbitrari

$\lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) \stackrel{(1)}{=} \lambda(\alpha_1 v_1) + \dots + \lambda(\alpha_k v_k) \stackrel{(1)}{=} \underbrace{(\lambda \alpha_1)}_{\in \mathbb{R}} v_1 + \dots + \underbrace{(\lambda \alpha_k)}_{\in \mathbb{R}} v_k \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

PISTOLOTTO : $\text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ è chiuso rispetto a $+$ e $\cdot$ in V .

SEMPIO

$$V = \mathbb{R}^3$$

$$v_1 = u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = ?$ Abbiamo già visto che

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} v_1 - \frac{3}{2} v_2 \quad (\text{lez. del 22/9})$$

(1)

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 - \frac{1}{2} \alpha_3 v_1 - \frac{3}{2} \alpha_3 v_2 =$$
$$\stackrel{(1)}{=} \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_3 \right) v_1 + \left(\alpha_2 - \frac{3}{2} \alpha_3 \right) v_2$$

Conclusione: v_3 è inutile, quello che riusciva a fare con v_1, v_2, v_3 lo posso fare anche con i soli v_1, v_2

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\beta \\ -\beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha - \beta \\ \alpha - \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 3\alpha - \beta \\ \alpha - \beta \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

non

ESEMPIO

$$V = \mathbb{R}^3$$

v_1, v_2 come sopra

$$v_3 = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2$$

$$e_2 = -\frac{1}{2} v_1 - \frac{3}{2} v_2$$

$$\mathbb{R}^3 = \text{Span}(e_1, e_2, e_3) \subseteq \text{Span}(v_1, v_2, \overset{v_3}{e_3}) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Dunque (SPIEGARE BENE) $\text{Span}(v_1, v_2, e_3) = \mathbb{R}^3$

Abbiamo un caso particolare della seguente

Def. $v_1, \dots, v_k \in V$ siano tali che $\text{Span}(v_1, \dots, v_k) = V$.

Allora $v_1, \dots, v_k$ si dicono (formare) un sistema di

generatori per V .

EsPLICITAMENTE questo vuol dire che ogni element
di V (vettore) si può scrivere come combinazione
lineare di $v_1, \dots, v_k$.

PISTOLOTTO!

ESEMPIO P spazio vettoriale ^{su $\mathbb{R}$} di tutti i polinomi
nell'indeterminata x , a coefficienti in $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R}[x] = P. \quad \mathcal{B} = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$$

$\mathcal{B}$ è un insieme infinito.

$\text{Span}(\mathcal{B})$: insieme di tutte le possibili combina-
zioni lineari, a coeff. in $\mathbb{R}$, di un qualsiasi
sottoinsieme finito di $\mathcal{B}$.

$$\text{Span}(\mathcal{B}) = \mathbb{R}[x]. \quad \mathcal{B} \text{ è un sistema di gen. per } \mathbb{R}[x]$$

$$\mathcal{B} \text{ — genera — } \mathbb{R}[x]$$

$\text{Span}(1, x, x^2, x^3)$ sono tutti i possibili polino-
mi in x di grado ≤ 3 , più
il polinomio nullo

$$\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

ESEMPIO

$$V = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = v_1 + v_2 \quad \text{quindi } v_3 \text{ è inutile per lo Span}$$

$$\text{esistono } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ t. c. } \alpha v_1 + \beta v_2 = v_4 ?$$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \alpha + 3\beta \end{pmatrix} = v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 6 \\ \alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \quad \beta = \alpha + 3\beta - (\alpha + 2\beta) = 1 - 6 = -5 \Rightarrow \alpha = 16$$

$v_4 = 16v_1 - 5v_2$ anche v_4 è inutile per lo span.

Cioè $\text{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{Span}(v_1, v_2) = ?$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ arbitrario. Esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} ? \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ \alpha + 3\beta = b \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = b - a \\ \alpha = 3a - 2b \end{cases} \quad \underline{\underline{SI}}$$

$$\text{Span}(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$$

$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_2\}$ sono

tutti sistemi di generatori di $\mathbb{R}^2$.

Il "piccolo" è il sistema di generatori, più è "gestibile".

$$\text{Span}(v_1) = \left\{ \alpha v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad v_2 \notin \text{Span}(v_1)$$

$$\text{Span}(v_2) = \left\{ \alpha v_2 = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$v_1 \in \text{Span}(v_2) \Leftrightarrow 2\alpha = 1 = 3\alpha \quad \alpha = 0 \text{ assurdo.}$$

Quindi non è possibile "sfoltire" $\{v_1, v_2\}$ ed ottenere ancora un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$. Diremo che $\{v_1, v_2\}$ è un s.d.g. minimale di $\mathbb{R}^2$.

Def. V spazio vettoriale; $G = \{v_1, \dots, v_s\}$ è detto s.d.g. minimale se, preso comunque $F \subsetneq G$ (SPIEGARE) si ha $\text{Span}(F) \subsetneq V$

cioè F non è un s.d.g. per V .

PROPOSIZIONE (è un teorema non molto importante...)

Sia G un sistema di generatori minimale per lo spazio vettoriale V . Allora ogni $w \in V$ si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di G in modo unico.

Dim.

$$G = \{v_1, \dots, v_k\}.$$

Per assurdo, supponiamo che esista $w \in V$ tale che

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k$$

con $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \neq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$. Quest'ultima condizione significa che esiste un indice i t.c. $\alpha_i \neq \beta_i$. Sia $i=1$, per fissare le idee.

Allora

$$\alpha_1 v_1 - \beta_1 v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_k v_k - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_k v_k$$

$$\underbrace{(\alpha_1 - \beta_1)}_{\neq 0} v_1 = (\beta_2 - \alpha_2) v_2 + \dots + (\beta_k - \alpha_k) v_k$$

$$v_1 = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1} (\beta_2 - \alpha_2) v_2 + \dots + (\alpha_1 - \beta_1)^{-1} (\beta_k - \alpha_k) v_k$$

$$(1) \quad \text{cioè} \quad v_1 \in \text{Span}(v_2, \dots, v_k)$$

Ma allora $\text{Span}(v_2, \dots, v_k) = V$, assurdo.

Una conseguenza: se V e G sono come sopra

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_V \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0_0$$

28/3/16

(6)

Def. V spazio vettoriale $v_1, \dots, v_s \in V$ si dicono linearmente indipendenti se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = 0_V \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0_{\mathbb{R}}$$

ESEMPIO $s=1$ $\alpha N = 0_V$ Per capire, suppongo che $\alpha \neq 0$. Allora

$$\alpha N = 0_V \implies \alpha^{-1}(\alpha N) = \alpha^{-1} 0_V = 0_V$$

(1) " ?

$$(\alpha^{-1} \alpha) N = 1_{\mathbb{R}} \cdot N = N \xrightarrow{(1)} N = 0_V \implies N = 0_V$$

$$\beta \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi } 0_V = 0_V + 0_V \implies$$

$$\cancel{\beta} \cdot 0_V = \beta(0_V + 0_V) = \cancel{\beta} 0_V + \beta 0_V \implies \underline{\beta 0_V = 0_V} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

Allora, se $N \neq 0$ $\alpha N = 0_V \implies \alpha = 0$
e N è L. IND.

Sopra abbiamo dimostrato che:

PROP. Un sistema di generatori minimale per V è formato da vettori linearmente indipendenti tra loro.