LEZIONE 2

SISTEMI (DI EQUAZIONI) LINEARI

RIASSUNTO della lezione di ieri

sistema di equazioni lineari è

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $x_1, \dots, x_n$: le INCOGNITE
- $b_1, \dots, b_m$: i TERMINI NOTI
- a_{ij} : i COEFF. delle INCOGNITE

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} \quad \forall i, \forall j$

S.L. formato da m equazioni in n incognite

$\mathbb{R}^n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) \mid$ n-pla ordinata di numeri reali $\}$

n-PLA

$n = 3$ per esempio $(5,1,3) \neq (1,5,3)$

Def. $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione del SL (1)

se $a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n = b_i$ è verificata SPIEG

per ogni $i = 1, \dots, m$. SPIEGARE

Se il SL (1) ha soluzioni si dice COMPATIBILE, altrim. si dice INCOMPATIBILE

RISOLVERE IL SL (1) significa

a) vedere se è compatibile

b) se lo è, vedere "quante" soluzioni ha

c) determinare esplicitamente tutte le soluzioni.

Per risolvere (1) useremo l'

IDEA: sostituire il SL (1) con un altro SL (2) DOPO che abbia le stesse soluzioni di (1) (in particolare, se (1) non ha soluzioni neanche (2) ne ha), e che sia "più facile" da risolvere di (1).

Si parte dal SL (1) e lo si modifica, utilizzando ad ogni passo soltanto una delle tre operazioni elementari (non è concesso di fare altro!)

a) scambiare tra di loro due equazioni.

b) moltiplicare una certa equazione per un dato numero reale c, con $c \neq 0$

c) fissate comunque due equazioni ~~[crossed out]~~ con $i \neq h$

$\boxed{5}$ sostituire l'equazione

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{di (1) con}$$

la nuova equazione ($d \in \mathbb{R}$ è fissato):
può anche essere 0, ma....

NB. l'h-esima eq. di (1) resta tale e quale

$\boxed{4}$ $$(a_{i1} + d a_{h1})x_1 + (a_{i2} + d a_{h2})x_2 + \ldots + (a_{in} + d a_{hn})x_n = b_i + d b_h$$

$\boxed{3}$ $$(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) + d(a_{h1}x_1 + \ldots + a_{hn}x_n) = b_i + d b_h$$

$\boxed{1}$ $$\begin{cases} \ldots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \\ a_{h1}x_1 + \ldots + a_{hn}x_n = b_h \\ \ldots \end{cases}$$

moltiplico I° e II° membro per d, e poi sommo membro a membro con

$\boxed{2}$

Ogni SL ottenuto a partire da (1) con le op. a), b), c)

ha le stesse soluzioni di (1)
(si dice "è equivalente ad (1)")

Basta verificarlo per ciascuna delle operazioni a), b), c).

Se faccio la a) questo è ovvio

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2y - 3z = 14 \\ 4x + 7y + z = 13 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 4x + 7y + z = 13 \\ 2y - 3z = 14 \end{cases}$$

Se faccio l'operazione elementare b) sostituisco l'equazione di (1):

(3) $$a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n = b_i$$

con l'equazione

(4) $$\underbrace{c a_{i1} x_1 + \dots + c a_{in} x_n}_{\shortparallel} = c b_i$$

$$c(a_{i1} x_1 + \dots + a_{in} x_n)$$

Supponiamo che $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ verifichi la (3). Allora è chiaro che $(u_1, \dots, u_n)$ verifica anche la (4): basta moltiplicare membro a m. per c la

$$a_{i1} u_1 + \dots + a_{in} u_n = b_i \quad \text{(soddisfatta!)}$$

per ottenere:

(5) $$c a_{i1} u_1 + \dots + c a_{in} u_n = c b_i \quad \text{(ancora soddisfatta!)}$$

Viceversa, supponiamo che $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ verifichi l'equazione (4), cioè supp. che valga la relazione (5).

SPIEGARE

Raccolgo la c a primo membro

$$c(a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n) = c\,b_i \qquad \text{(soddisfatta!)}$$

Poiché $c \neq 0$, la posso semplificare ottenendo

$$a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n = b_i \qquad \text{(soddisfatta!)}$$

Le altre equazioni del SL (1) sono rimaste le stesse, quindi anche facendo l'operazione elementare b) si ottiene un SL equivalente ad (1).

ESEMPIO

uso $c = \frac{1}{4}$ nella prima equazione di

$$\begin{cases} 4x + 7y + z = 13 \\ 2y - 3z = 14 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + \frac{7}{4}y + \frac{1}{4}z = \frac{13}{4} \\ 2y - 3z = 14 \end{cases} \rightsquigarrow$$

uso $c = \frac{1}{2}$ in questa equaz.

$$\begin{cases} x + \frac{7}{4}y + \frac{1}{4}z = \frac{13}{4} \\ y - \frac{3}{2}z = 7 \end{cases}$$

questi due SL sono equivalenti.

Infine vediamo che cosa succede facendo l'op. elementare c.

in (1) ho le equazioni

$$(6) \quad \begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n = b_h \end{cases}$$

Dopo aver fatto la c) nel SL mi trovo le equazioni

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + d\,(a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n) = b_i + d\,b_h \\ a_{h1}x_1 + \dots + a_{hn}x_n = b_h \end{cases}$$

Suppongo che $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ sia una soluzione delle (6) SPIEGARE.

Allora $(u_1, \dots, u_n)$ è anche soluzione di entrambe le (7). SPIEGARE.

Viceversa, suppongo che $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ sia soluzione di entrambe le (7). Allora è soluzione della seconda delle (6). Inoltre, dall'essere soddisfatta anche la

$$a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n + d\,(a_{h1}u_1 + \dots + a_{hn}u_n) = b_i + d\,b_h$$

segue che anche la prima delle (6) è soddisfatta. Le altre eq. del SL (1) sono rimaste le stesse, quindi anche facendo l'operazione elementare c) si ottiene un nuovo SL, equivalente ad (1). ■

ESEMPIO

$$\begin{cases} x + \frac{7}{4}y + \frac{1}{4}z = \frac{13}{4} \\ y - \frac{3}{2}z = 7 \end{cases}$$

moltiplico questa per $\left(-\frac{7}{4}\right)$ e sommo a

$$\begin{cases} x + \left(\frac{1}{4} + \frac{21}{8}\right)z = \frac{13}{4} - \frac{49}{4} \\ y - \frac{3}{2}z = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \frac{23}{8}z = -9 \\ y - \frac{3}{2}z = 7 \end{cases}$$

TUTTE le sol. di si trovano subito

$$\begin{cases} 2y - 3z = 14 \\ 4x + 7y + z = 13 \end{cases}$$

è equivalente a

$$\boxed{x = -\frac{23}{8}z - 9 \qquad y = \frac{3}{2}z + 7 \qquad z \in \mathbb{R} \text{ qualsiasi}}$$

tale z è detto param. libero.

Dobbiamo ancora capire come, utilizzando le op. elementari a), b), c), si possa ottenere dal SL (1) un nuovo SL (equivalente ad (1)) che sia però "più facile" da risolvere

Detto ieri: tutta l'informazione delle equazioni del SL (1) è contenuta nei coefficienti a_{ij} e nei termini noti. (le "x", i "+", gli "=" fan solo scena).

Nell'esempio i coefficienti ed i termini noti erano

1ª RIGA 1ª COLONNA

$$(8) \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & \vdots & 14 \\ 4 & 7 & 1 & \vdots & 13 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1^a \text{ equaz.} \\ 2^a \text{ equaz.} \end{array}$$

coeff. di x .... coeff. di z T.N.

chiameremo una tale tabella una MATRICE

Osserviamo che righe in tale matrice sono importanti: ciascuna di esse rappresenta un'equazione del SL.

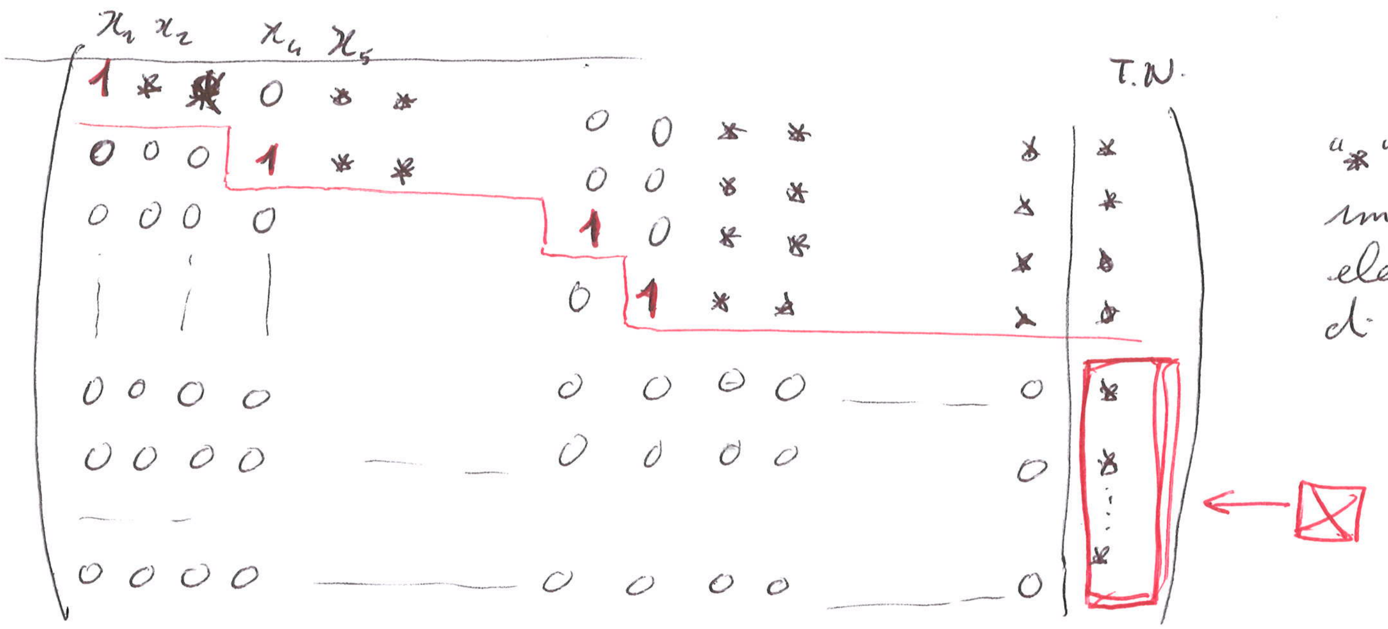
Anche le colonne sono importanti perché hanno un ben preciso significato. SPIEGARE

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \overbrace{0 \quad 2 \quad -3}^{\text{COEFF.}} & \vdots & \overset{\text{T.N.}}{14} \\ 4 \quad 7 \quad 1 & \vdots & 13 \end{pmatrix}}_{} \rightsquigarrow (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{23}{8} & \vdots & -9 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \vdots & 7 \end{pmatrix}$$

la matrice "COMPLETA" del SL (1)

Vedremo in seguito il perché

Per verificare la seconda condizione, e cioè che il SL (2) ottenuto da (1) con le op. elementari sia "più semplice" da risolvere di (1) <u>bisogna</u> trasformare (con op. elem.) la matrice completa di (1) in una matrice <u>a scala</u>



"$*$" indica un qualsiasi elemento di $\mathbb{R}$

che verifichi, cioè le seguenti condizioni:

- il primo (leggendo da SX verso DX) elemento non nullo di ogni riga (se c'è) è $=1$. Tale elemento è chiamato <u>PIVOT</u>.
- il primo elemento non nullo della $(i+1)$-esima riga (se c'è) si trova a DX del primo el.to $\neq 0$ della i-esima riga. <u>SPIEGARE</u>
- le ~~[illegible]~~ "ENTRATE" (<u>SPIEGARE</u>) al di sopra di un pivot sono tutte nulle

A questo punto:

1) Se la parte $\boxtimes$ nell'ultima colonna non c'è, oppure è tutta formata da zeri il sistema (1) è compatibile. Ovvero: se in $\boxtimes$ c'è almeno un'entrata $\neq 0$, il sistema (1) è incompatibile.

2) Se (1) è compatibile si può dare alle indeterminate che non corrispondono a colonne di pivot dei valori <u>arbitrari</u>. Tali indeterminate si chiamano <u>parametri liberi</u>

3) Una volta fissati i param. liberi, le indeterminate corrispondenti ai pivot sono univocamente determinate.

<u>ESEMPIO</u>

$m = 1 \qquad n = 2 \qquad (1).\ \boxed{2x - 5y = 12} \qquad (2 \quad -5 \ \vdots\ 12)$

$x - \frac{5}{2} y = 6 \qquad\qquad (1 \quad -\frac{5}{2} \ \vdots\ 6)$

PIVOT ↑ param. libero $\qquad \boxtimes$ è vuota $\qquad \underbrace{\left(\frac{5}{2}y + 6, y\right)}_{\text{sol. generale}}$

$-5y + 2x = 12$ è la stessa equaz. ....

$y - \frac{2}{5} x = -\frac{12}{5}$

PIVOT. ↑ param. libero $\qquad \underbrace{\left(x, \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}\right)}_{\text{sol. generale.}}$