

LEZIONE 3

24/9/16 (1)

Esercizio 1

SPIEGARE

$$\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ 4x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right) \quad (1)$$

$$\begin{cases} m=3 \\ n=3 \end{cases}$$

Prima di partire: conviene esercitare l'occhio. Se possibile, mai "dividere" quando si usa l'operazione elementare h). Vedremo il perché.

① sommo la seconda riga alla prima

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 6 \end{array} \right)$$

② sommo due volte la seconda riga alla terza riga

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

③ sommo due volte la prima riga alla seconda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad \otimes$$

Potrei anche dividere la seconda riga per -5 , e complicarmi la vita...

④ sottraggo la terza riga dalla seconda ("d" = -1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

è un colpo di fortuna!

⑤ moltiplico la seconda riga per "c" = $-\frac{1}{5}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

⑥ sommo alla prima riga la seconda moltiplicata per "d" = 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \quad (2)$$

21/9/16

(2)

Quindi il SL (1) è equivalente al SL

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$$

Dunque in questo caso c'è un'unica
soluzione $(x, y, z) = (2, 1, 4)$

Osservando la matrice a scalini (2) vediamo che (...)

- manca la zona $\boxtimes$, dunque il SL (1) è compatibile.

- ci sono 3 pivot

- non ci sono "parametri liberi".

- quindi il numero delle soluzioni è $(\infty^{n - \# \text{PIVOT}})$

$$\underbrace{\infty^{3-3} = \infty^0 = 1}_{\text{a}} \text{ unica soluzione.}$$

è solo CONVENZIONALE !!!!!

OSSERVAZIONE

Dal punto di vista del "trovare le soluzioni" ci si poteva fermare al punto $\otimes$: la terza equazione permetterebbe di trovare z in modo unico. Una volta determinato z , la seconda equazione permetterebbe di trovare y in modo unico. Trovati z ed y , ...

ESERCIZIO 2

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ \boxed{5}x + y - z = 1 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$$

ancora $m=3, n=3$ cioè un SL di
tre equazioni in tre incognite.

(1) sottraggo dalla 2^a equazione la
prima equaz. mult. per "d" = -5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & -9 & -11 & | & -4 \\ \boxed{4} & -1 & -3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

(2) sottraggo dalla 3^a riga la prima
riga multipl. per "d" = -4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & -9 & -11 & | & -4 \\ 0 & \boxed{-9} & -11 & | & -3 \end{pmatrix}$$

21/9/16

(3)

- 3) sommo alla terza riga la seconda
riga moltiplicata per -1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{TN}$$

Questa riga mi dice che il SL è incompatibile.
È inutile andare avanti.

ESERCIZIO 3

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4w = 4 \\ x - y + 2z - 3w = 1 \\ 3x - 4y + 7z - 10w = 6 \end{cases}$$

 $m=3$ $n=4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 7 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

① $R_2 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 7 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

② $R_3 - 3R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & +2 & -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

③ $R_3 - 2R_2$

i pivots $\rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

④ $R_1 + 2R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x \quad y \quad z \quad w$

$$\begin{cases} x = -z + 2w - 2 \\ y = z - w - 3 \end{cases}$$

z, w sono parametri liberi

" $n - \# \text{PIVOTS}$ " = $4 - 2 = 2$ il sist. ha ∞^2 soluzioni

La soluzione generale del SL è

$$(-z + 2w - 2, z - w - 3, z, w)$$

ESERCIZIO 4

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ -kx + y = 1 \end{cases}$$

$m=2$

$n=2$

$$k \in \mathbb{R} \text{ parameter}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ -k & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$(1) \quad R_2 + k R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & 1+k^2 & 1+k \end{array} \right)$$

Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si ha $1+k^2 > 0$ ($k^2 \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ (1+k^2)y = 1+k \end{cases}$$

$$y = \frac{1+k}{1+k^2}$$

$$x = 1 - ky = 1 - \frac{k+k^3}{1+k^2} =$$

$$= \frac{1+k^2-k-k^3}{1+k^2} = \frac{1-k}{1+k^2}$$

Il sistema è compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$, ed ammette un'unica soluzione.

ESERCIZIO 5
 $k \in \mathbb{R}$, parameter

$$\begin{cases} 2x + ky = 2 \\ kx + 2y = k \\ ky + kz = k \end{cases}$$

$m=3$

$n=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ k & 2 & 0 & k \\ 0 & k & k & k \end{array} \right)$$

$$(1) \quad R_2 - \frac{k}{2} R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ 0 & 2 - \frac{k^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & k & k & k \end{array} \right)$$

che fare

k è "più semplice" di $2 - \frac{k^2}{2}$: prendo k come banda della matrice.

Se $k=0$ la matrice diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

21/9/16

$\begin{matrix} x & y & z \\ \downarrow & & \\ \text{param.} & & \\ \text{liber} & & \end{matrix}$

(2) $\frac{1}{2} R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \leftarrow \text{il SL è compatibile}$$

$k=0$ $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z \text{ è liber} \end{cases}$

la soluzione generale è
 $(1, 0, z)$ COMMENTARE

Se $k \neq 0$

(2) $k^{-1} R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ 0 & 2 - \frac{k^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(3) $R_2 \leftrightarrow R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 - \frac{k^2}{2} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

oppure $2 - \frac{k^2}{2} = \frac{4 - k^2}{2} = \frac{(2-k)(2+k)}{2}$

quindi $2 - \frac{k^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \underline{k=2} \text{ oppure } \underline{k=-2}$

Allora, se $k \neq 0, 2, -2$

(3) $\left(2 - \frac{k^2}{2}\right)^{-1} R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & k & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(4) $R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \boxed{k} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

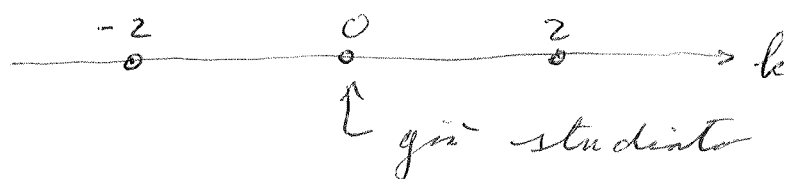
(5) $R_1 - k R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

(6) $\frac{1}{2} R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array} \right)$$

Quindi $\forall k \neq 0, 2, -2$, allora la soluzione esiste
ed è unica $(x, y, z) = (1, 0, 1)$



I casi $k=2$ e $k=-2$ si studiano separatamente.

$$\boxed{k=2} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \leftarrow \text{compatibile}$$

$x \quad y \quad z$
 $\quad \quad \quad \swarrow$ param. libero

La soluzione generale è $(z, -z+1, z)$

$$\boxed{k=-2} : \text{a loro}$$

PROBLEMA Esistono sistemi lineari (in due incognite) che hanno $(1, 4), (-2, 7)$ tra le soluzioni?

$ax + by = c$ generica equazione lineare in due incognite.

Devono essere soddisfatte le condizioni:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 4 = c \\ a(-2) + b \cdot 7 = c \end{cases} \quad \begin{cases} a + 4b - c = 0 \\ -2a + 7b - c = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{SL} \\ \text{OMOGENEO} \end{array}$$

SPIEG.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 0 \\ -2 & 7 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 + 2R_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 0 \\ 0 & 15 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{3}R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

perché incaponirsi a voler avere un pivot qui → a tutti i costi?

$$\begin{array}{ccc|c} a & b & c & 0 \text{ TW} \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

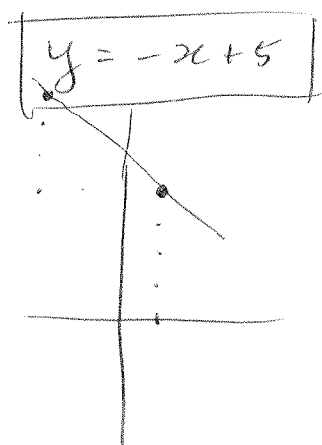
$$R_1 + R_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \end{pmatrix}$$

pivots
b parameter
libero

$$\begin{cases} a = b \\ c = 5b \end{cases}$$

$$b=1 \Rightarrow a=1 \quad c=5 \quad \underline{x+y=5}$$

$$\begin{matrix} m=1 \\ n=2 \end{matrix}$$



l'equazione di una retta

PROBLEMA Esistono sistemi lineari che hanno $(1,0,2)$
 $(1,1,1)$, $(2,-1,0)$ tra le soluzioni?

$$ax + by + cz = d$$

a, b, c, d devono soddisfare le condizioni

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 2 = d \\ a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = d \\ a \cdot 2 + b \cdot (-1) + c \cdot 0 = d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 2c = d = 0 \\ a + b + c = d = 0 \\ 2a - b = d = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{SL} \\ \text{omogenea} \end{matrix}$$

SL nelle incognite a, b, c, d .

Un SL omogeneo ha sempre almeno la soluz. banale $(0, 0, \dots, 0)$. Quindi la cosa interessante è vedere se ha soluzioni NON banali.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{2} & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

non scrivo la colonna TW perché è inutile per un SL omogeneo.

$$\begin{array}{l} R_2 - R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 + R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

a b c d

a b d c

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & \uparrow 1 & 0 & -1 \\ 0 & \nearrow 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

pivots c è param. libera

$$\begin{cases} a = d - 2c \\ b = c \\ d = 5c \end{cases}$$

$$\boxed{c=1 \Rightarrow d=5 \quad b=1 \quad a=3}$$

$$\boxed{3x + y + z = 5}$$