

15^a LEZIONE

27/9/16

1

- Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ ($n \geq 1$, in realtà)

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$$

gli el. d. d. $\mathbb{R}^n$
sono detti vettori

$\hookrightarrow$ è ORDINATA

- due operazioni

$$v, w \in \mathbb{R}^n$$

$$v + w \in \mathbb{R}^n \quad \text{"somma" vettori}$$

$$v \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{scalare, è un n.r.}) \quad \lambda v \in \mathbb{R}^n$$

- proprietà delle operazioni:

+ è associativa, $\exists 0_{\mathbb{R}^n}$, l'opposto di ogni el. d.
+ è commutativa.

Inoltre

$$(1) \begin{cases} \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \\ (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u \\ \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u \\ 1 \cdot u = u \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \forall \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \text{valgono le} \\ \text{Proprietà di "distribuzione"} \end{array}$$

- Combinazione lineare

$$u_1, \dots, u_s \in \mathbb{R}^n \quad (\text{cioè ciascun } u_i \text{ è un vettore})$$

$$\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s \in \mathbb{R}^n$$

viene detta C.L. dei vettori $u_1, \dots, u_s$, con i
coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

- Osserviamo che ogni elemento di $\mathbb{R}^n$ si può
ottenere come C.L. di un numero finito di vettori
fissati opportunamente a priori

$$n=3 \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$$

sono fissati

$$\forall v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{h: } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}} v_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^3}} e_1 + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}} v_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^3}} e_2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}}} v_3 \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{R}^3}} e_3$$

● MATRICI

Studiando i sistemi lineari abbiamo incontrato le matrici. Sono "tabelle di numeri"

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

entrata della matrice M

2^a riga

m-esima colonna

↑
prima colonna

Le matrici si pensano "organizzate" in righe e colonne. M qui sopra ha m righe e n colonne. L'idea che M è di tipo $m \times n$.

Ogni a_{ij} si dice entrata della m. $a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j$
i : indice di riga j : indice di colonna

Saremmo pensare che una matrice come M sia un modo diverso di scrivere un elemento di $\mathbb{R}^{m \times n}$, che in certe situazioni (e.g. sist. lin) risulta più naturale.

ESEMPIO

27/9/16

(3)

$$m = n = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \text{per esempio ("lettura")}$$

$$N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{altra matrice } 2 \times 2$$

$$\underline{M+N} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

 $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario

$$\underline{\lambda M} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

sono le stesse operazioni che abbiamo def. la settimana scorsa in $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{M}(2 \times 2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{SPIEG.}$$

$\mathcal{M}(2 \times 2)$ è spazio vettoriale (sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali) rispetto alle due operazioni def. sopra.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} =$$

$$= a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\uparrow} + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\uparrow} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\uparrow} + d \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\uparrow} \quad \text{fissati.}$$

Ogni matrice 2×2 si può scrivere come C.L. di queste 4.

ESEMPIO

matrice simmetrica l'avevo a diagonale princ.

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 2) \mid b=c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

27/9/16

(4)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}$$

$$\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{M}(2 \times 2) \quad \text{SPIEGARE}$$

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{M}(2 \times 2)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \quad \text{qualsiasi}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ b+f & d+g \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$$

è associativa e
commutativa perché
tale è in $\mathcal{M}(2 \times 2)$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \quad \text{è el. t. neutro risp. +}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \quad - \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-a & b-b \\ b-b & d-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \right\} = \lambda \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ b+f & d+g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a+e) & \lambda(b+f) \\ \lambda(b+f) & \lambda(d+g) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda e & \lambda b + \lambda f \\ \lambda b + \lambda f & \lambda d + \lambda g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda e & \lambda f \\ \lambda f & \lambda g \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Riassumendo

- sommando tra loro due qualsiasi matrici simmetriche si trova ancora una matrice simmetrica.
 $S + S^t$ è sim. $\text{sim} + \text{sim} = \text{sim}$

1. $\text{sim} = \text{sim}$.

- la matrice nulla è simmetrica, l'op. di

- Per le operazioni tra m. simmetriche valgono tutte le proprietà (1).

$M(2 \times 2) \cong \mathbb{R}^4$ spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$)

U

S

le operazioni $+$ e $\cdot$ su $M(2 \times 2)$ si "restringono bene" ad S

$S, +, \cdot$ è a sua volta uno spazio vettoriale

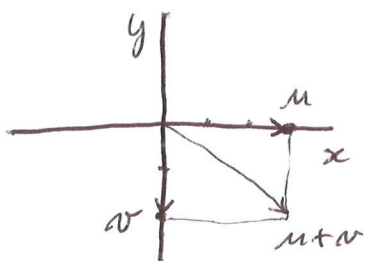
L'idea che S è sottospazio (vettoriale) di $M(2 \times 2)$

Vediamo con un esempio che cosa significa esattamente "si restringono bene"

ESEMPIO

allora o $x=0$ oppure $y=0$

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \supset S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : xy = 0 \right\}$$



S è l'unione dell'asse x con l'asse y

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in S$$

$$u+v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 \\ 0-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$3(-2) = -6 \neq 0$$

$$\underline{u+v \notin S}$$

Quo ben capitare che per particolari scelte di $u, v \in S$ si abbia $u+v \in S$. Per esempio

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix} \in S \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+5 \\ 0+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 \\ 0 \end{vmatrix} \in S$$

Ma in generale questo non succede.

Diunque l'addizione $+$ in $\mathbb{R}^2$ non si restringe bene ad S .

Invece il prodotto per uno scalare si restringe bene:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \in S \quad (\Leftrightarrow xy=0) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{vmatrix}$$

$$(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 \underbrace{xy}_{=0} = 0$$

Una matrice 2×2 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ è simmetrica se e solo se $a_{12} = a_{21}$.

Una matrice 2×2 si dice anti-simmetrica se e solo se (son pedante, lo so...)

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} = -a_{11} & a_{12} = -a_{21} & a_{21} = -a_{12} & a_{22} = -a_{22} \\ \Downarrow & \underbrace{\hspace{2cm}} & & \Downarrow & \text{SPIEG} \\ a_{11} = 0 & \text{è la stessa condizione} & & a_{22} = 0 & \end{array}$$

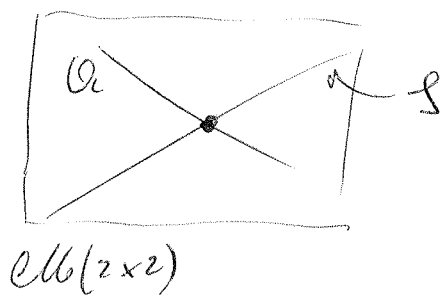
$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathcal{M}(2 \times 2)$$

↑ insieme delle matrici 2×2 anti-simmetriche.

$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & f \\ -f & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ la loro somma (come in $\mathcal{M}(2 \times 2)$) è ancora un elemento di $\mathcal{A}$

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda b \\ -\lambda b & 0 \end{pmatrix} \in Q$$

Si verifica
che anche Q è un sottosp. vett.
di $\mathbb{C}b$



$$Q \cap S = ? \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S \cap Q$$

Allora da $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Q$ segue

$$a=0, d=0, c=-b$$

$$\text{Da } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Q \text{ segue } c=b$$

$$\begin{cases} b+c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow b=c=0 \quad S \cap Q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = 0_{\mathbb{C}b}$$

$$S \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vettori di S , noti a priori

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

vettore di Q , noto a priori.

ESEMPIO

$2x^2 - 7x + 8$ polinomio di 2° grado

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

polinomio di grado n
se $a_n \neq 0$

Gli $a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n = g(x)$$

Se tutti gli a_i sono $= 0$
non si attribuisce grado
SPIEGARE. pol. di grado 0

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow n=r \text{ e } b_i = a_i \quad \forall i=0, \dots, n$$

Somma di polinomi: lo sapete fare

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \dots + \lambda a_n x^n$$

sapete molt.
tra loro due
pol. qualsiasi.
Ma in accont.
di questo

P sia l'insieme di tutti i polinomi in x , a coeff. in $\mathbb{R}$. $+$, $\cdot$

Si verifica che rispetto alle operazioni spiegate sopra, P è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

PBL Esistono $f_1, \dots, f_t \in P$ tali che ogni polinomio è C.L. (a coeff. real.) di $f_1, \dots, f_t$?

Il punto essenziale è che $f_1, \dots, f_t$ sono in numero finito.

~~Supponiamo~~ Esistono $f_1, \dots, f_t \in P$ con la proprietà richiesta.

Sia m il massimo dei loro gradi.

Allora il massimo grado possibile per

$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_t f_t \in P$ è sempre m .

Quindi facendole tutte le possibili C.L. di

$f_1, \dots, f_t$ non riuscirò mai a trovare x^{m+1} , per esempio.

Quindi la risposta al nostro PBL è NO.

$1, x, x^2, x^3, \dots, x^m, \dots$ è fam. di poly che funziona

Ma è una famiglia infinita. Ogni $f \in P$ è C.L. di un numero finito di essi.