

LEZIONE 7

29/9/2016

(1)

V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

$G \subset V$ (sottoinsieme) è un sistema di generatori per V se per ogni $u \in V$ esistono $v_{i_1}, \dots, v_{i_r} \in G$ (si noti che sono in numero finito) tal. che u è combinazione lineare di $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$. dependon dal particolare u che ho scelto. Per capire:

ESEMPIO

$V = \mathbb{P}$ l'insieme di tutti i polinomi nell'indeterminata x , a coefficienti reali.

(è molto comune indicare $\mathbb{P}$ con $\mathbb{R}[x]$.)

$$G = \{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots\} = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad 0 \in \mathbb{N} \text{ e } x^0 = 1$$

$$u = x + 3x^3 + 7x^{101}$$

$${}^u N_{i_1} = x$$

$${}^u N_{i_2} = x^3$$

$${}^u N_{i_3} = x^{101}$$

$$w = 8 - x + \frac{3}{2}x^2 - x^{12}$$

$${}^w N_{i_1} = 1$$

$${}^w N_{i_2} = x$$

$${}^w N_{i_3} = x^2$$

$${}^w N_{i_4} = x^{12}$$

e così via

(quasi...)

D'ora in avanti considereremo soltanto spazi vettoriali V per i quali esiste un sistema di generatori G che è un insieme finito:

$$G = \{u_1, \dots, u_s\}$$

Un sistema di generatori G di V è detto minimale se togliendogli anche un solo elemento non si ha più un sistema di generatori.

Peri abbiamo provato.

PROPOSIZIONE

Sia $G = \{u_1, \dots, u_n\}$ un sistema di generatori minimale

di V . Allora se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = O_V$ si ha necessariamente $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{R}}$.

Def. $v_1, \dots, v_n \in V$ si dicono vettori linearmente indipendenti se da $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = O_V$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i$) segue necessariamente $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0_{\mathbb{R}}$.

Dalla definizione segue che non ha importanza l'ordine in cui consideriamo i v_i .

Un modo equivalente di vedere le cose: bisogna capire bene che cosa significa che $v_1, \dots, v_n$ non sono linearmente indipendenti.

Allora, per definizione, esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = O_V$.

Supponiamo che sia $\alpha_1 \neq 0$. Allora da

$$\alpha_1 v_1 = -\alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_n v_n \quad \text{si ricava} \quad v_1 = \underbrace{\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}_{\in \mathbb{R}} v_2 - \dots - \underbrace{\left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)}_{\in \mathbb{R}} v_n$$

$$\Rightarrow v_1 \in \text{Span}(v_2, \dots, v_n)$$

Viceversa, se $v_1 = \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n$, allora si ha

$$v_1 - \beta_2 v_2 - \dots - \beta_n v_n = O_V \quad \text{cioè} \quad \underbrace{1}_{\neq 0} \cdot v_1 - \beta_2 v_2 - \dots = O_V$$

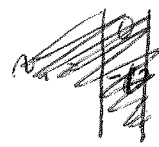
e quindi $v_1, \dots, v_n$ non sono linearmente indipendenti. Si dice che $v_1, \dots, v_n$ sono lin. DIPENDENTI.

Quindi.

$v_1, \dots, v_n \in V$ sono linearmente dependenti se e solo se uno dei v_i è combinazione lineare degli altri.

Come si fa a vedere se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti o meno? Vediamo un

ESEMPIO



$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$$

Sono linearmente indipendenti?

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -10 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0 & (**) \\ -12\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -10\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Dobbiamo risolvere un sistema lineare omogeneo di tre equazioni, nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Tale sistema lineare ammette sempre la soluzione banale: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Il punto è vedere se esistono altre soluzioni.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -12 & 0 & 2 \\ -10 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 \\ -12 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} \\ -12 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

la matrice dei coeff. del S.L.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{2}{10} \\ 0 & -\frac{12}{10} & -\frac{4}{10} \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

29/3/16 (4)

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

il nostro SL omogeneo
originario è equivalente
al SL omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{15}x_3 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

che posso scrivere anche

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{10}x_2 = \frac{1}{15}x_3 \\ 3x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Se do ad x_3 un valore arbitrario, allora i corrispondenti x_1, x_2 sono unici. Cioè, dalla seconda equazione

$$x_2 = -\frac{1}{3}x_3 \quad \text{e dalla 1}^a \text{ eq. } x_1 = \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{15}x_3 =$$

$$= -\frac{1}{30}x_3 + \frac{1}{15}x_3 = \frac{1}{30}x_3$$

La soluzione generale del nostro SL omogeneo è quindi $\left(\frac{1}{30}x_3, -\frac{1}{3}x_3, x_3\right) = x_3\left(\frac{1}{30}, -\frac{1}{3}, 1\right)$

- Se $x_3 \neq 0$ la soluzione è non banale, quindi i vettori v_1, v_2, v_3 dati non sono linearmente indipendenti. Sono linearmente dipendenti.
- L'insieme di tutte le soluzioni del SL omogeneo considerato si può pensare come

$$\left\{ x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^3$$

è un
sottospazio
vettoriale

Questo vale in generale

PROPOSIZIONE

L'insieme di tutte le soluzioni di un qualsiasi SL
omogeneo

$$(SLO) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

è un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbb{R}^n$.

Non è difficile dimostrarlo direttamente:

$(u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ e $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ sono arbitrarie soluzioni di (SLO).

È sufficiente verificare che:

- $(u_1, \dots, u_m) + (v_1, \dots, v_m) = (u_1 + v_1, \dots, u_m + v_m)$
è ancora una soluzione di (SLO)

&

- $\lambda(u_1, \dots, u_m) = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_m)$ è ancora soluz. di (SLO).

Infatti, per ogni i con $1 \leq i \leq m$ si ha

$$\begin{aligned} & a_{i1}(u_1 + v_1) + a_{i2}(u_2 + v_2) + \dots + a_{in}(u_n + v_n) = \\ & = a_{i1}u_1 + a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}u_n + a_{in}v_n = \\ & = \underbrace{(a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n)}_{=0 \text{ perché } (u_1, \dots, u_m) \text{ è sol. di (SLO)}} + \underbrace{(a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n)}_{=0 \text{ perché } (v_1, \dots, v_m) \text{ è sol. di (SLO)}} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Analogamente si fa la 2^a verifica (ESERCIZIO)

Verificare con un esempio concreto che l'insieme di tutte le soluzioni di un sistema lineare non omogeneo non è mai un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

CHIAVIMENTO

V spazio vettoriale qualsiasi. $W \subseteq V$ sottoinsieme

Quando è che W è sottospazio vettoriale di V ?

Se W è sottospazio vettoriale deve contenere almeno l'elemento neutro rispetto alla somma. Dunque una prima condizione è

$$1) \quad W \neq \emptyset$$

Nella PROP. di pag. 5 non l'abbiamo considerata perché avevamo già detto che ogni SL omogenea ha almeno la soluzione banale.

Le altre due condizioni sono

$$2) \quad \forall w_1, w_2 \in W \quad \text{si ha} \quad w_1 + w_2 \in W$$

l'addizione in V

$$3) \quad \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad \lambda \cdot w \in W$$

la mult. per uno scalare in V .

La 2) si esprime dicendo che W è chiuso rispetto all'addizione in V , e la 3) dicendo che W è chiuso rispetto al prodotto per uno scalare in V .

(dimenticare "l'addizione si restringe bene" e simili.)

ESERCIZIO

Verificare che da 1), 2), 3) segue $0_V \in W$

ESERCIZIO

$$\text{Sia } W \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

Verificare che W è chiuso rispetto all'addizione in $\mathbb{R}^2$, ma non rispetto al prodotto per uno scalare. $\perp$

Un'ultima osservazione: il passaggio dalla combinas. lineare* al sistema lineare** si può generalizzare. Ci interessa in questo senso:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{sistema lineare} \\ \text{qualsiasi} \\ \text{equivalente a} \end{array}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \dots \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \nwarrow$
 $B \in \mathbb{R}^m$

Sono le colonne $A_1, A_2, \dots, A_n$ della matrice A dei coeff. del SL. $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m$

Quindi risolvere il SL equivale a vedere se nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^m$ si possa esprimere il vettore B come combinazione lineare dei vettori $A_1, \dots, A_n$.

Il SL originario è compatibile $\Leftrightarrow B \in \text{Span}(A_1, \dots, A_n)$

Svilupperemo ancora questo punto di vista.

non

Nella lezione scorsa abbiamo visto che

preso $v_1 \in V$ v_1 è lin. indipendente $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$

Quando due vettori $v_1, v_2 \in V$ fissati sono LIN. INDIP.?

Supponiamo $v_1, v_2 \in V$ LIN. INDIP.

Allora il singolo v_2 è LIN. INDIP.

Infatti, sia $\alpha v_1 = 0_V$. Possiamo pensare tale relazione come

$$\alpha v_1 + 0_{\mathbb{R}} \cdot v_2 = 0_V \xrightarrow{v_1, v_2 \text{ L.I.N.D.}} \alpha = 0_{\mathbb{R}} \dots$$

Dunque $v_1 \neq 0_V$.

Per "simmetria" si ha anche $v_2 \neq 0_V$.

Non basta: si ha anche $v_2 \notin \text{Span}(v_1)$.

Infatti, altrimenti:

$$v_2 \in \text{Span}(v_1) = \{\lambda v_1 : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{cioè} \quad \underline{v_2 = \lambda v_1}$$

per un opportuno $\lambda \in \mathbb{R}$. Riscriviamo $\uparrow$ come

$$\lambda v_1 + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_2 = 0_V$$

ne seguirebbe che v_1, v_2 non sono linearmente indipendenti. Assurdo.

Naturalmente si ha anche $v_1 \notin \text{Span}(v_2)$

Viceversa, supponiamo di avere due vettori

$v_1, v_2 \in V$ e di sapere che $v_1 \neq 0_V$ e $v_2 \notin \text{Span}(v_1)$.

$$\text{Sia } \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_V \quad \boxed{\times}$$

Per essere $\alpha_2 \neq 0_{\mathbb{R}}$? In tal caso da $\boxed{\times}$ si avrebbe

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v_1 + v_2 = 0_V \Rightarrow v_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} v_1 \in \text{Span}(v_1) \quad \text{assurdo.}$$

Chiamo $\alpha_2 = 0$ necessariamente, e da $\boxed{\times}$ si riduce

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 v_1 = 0_V \\ v_1 \neq 0_V \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 = 0_{\mathbb{R}}$$

TEOREMA (DELLO SCAMBIO)

V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$

Supponiamo che V ammetta un sistema di generatori
formato da un numero finito di vettori.

$I = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ con $v_1, \dots, v_r$ linearmente indipend.

$G = \{u_1, \dots, u_s\} \subset V$ sia un sistema di generatori di V .

Allora $r \leq s$.