Matematica e statistica

Prof.ssa Eva Sinchich – A.A. 2017/2018

Cecchia Irene

ATTENZIONE!! SE SEI IN POSSESSO DELLA VERSIONE PDF ORIGINALE DEL FILE PUOI CLICCARE SULLE VOCI DEL SOMMARIO PER RAGGIUNGERE IL RELATIVO CAPITOLO!!

Sommario

Teoria intuitiva degli insiemi

Def: un **insieme** è una collezione di oggetti avente un criterio oggettivo che permette di stabilire univocamente se un oggetto vi appartenga o no.

$A = \{1,2,3,4,5\ldots\}$ oppure $B=\{\text{numeri dispari}\}$

Def: Dati due elementi A,B, diremo che B è **sottoinsieme** di A e scriveremo $B\subseteq A$, se per ogni elemento $x\in B$ si ha che $x\in A$.

Inoltre, se B è effettivamente diverso da A, ossia che A contiene elementi che non appartengono a B, allora diremo che B è **sottoinsieme proprio** di A e scriveremo $B\subset A$, oppure $B\subseteq A$

Postulato insieme vuoto:

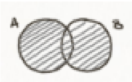
- Esiste uno, ed un solo, **insieme vuoto**, indicato con $\emptyset$, tale che per ogni elemento x si ha $x\notin\emptyset$

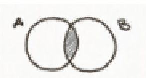
Teoremi sull'insieme vuoto:

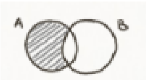
- L'insieme vuoto è unico
- L'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme

L'**insieme universo**, indicato con Ω, è l'insieme contente il maggior numero di elementi che ci interessa considerare. In generale, lo si può definire come l'insieme che contiene ogni altro insieme.

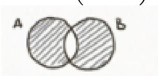
Operazioni elementari tra due insiemi A,B:

- UNIONE -> $A\cup B$
  $A\cup B$ è l'insieme che contiene sia gli elementi appartenenti ad A che gli elementi appartenenti a B
  

- INTERSEZIONE -> $A\cap B$
  $A\cap B$ è l'insieme che contiene gli elementi che appartengono ad A ma non a B
  

- DIFFERENZA -> $A\setminus B$
  $A\setminus B$ è l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma non a B
  

- PRODOTTO CARTESIANO -> AXB
  AxB è l'insieme di tutte le coppie ordinate del tipo: $AxB=\{(a;b) \mid a\in A, b\in B\}$
  Il prodotto cartesiano di un insieme per sé stesso, AxA è indicato con A^2 e, in generale, l'insieme delle n-uple ordinate di elementi di A è indicato con A^n

- DIFFERENZA SIMMETRICA -> $A\Delta B$
  $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$
  

<u>Proprietà delle operazioni:</u>

- Proprietà ASSOCIATIVA
  $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$
  $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
- Proprietà COMMUTATIVA
  $A\cup B = B\cup A$
  $A\cap B = B\cap A$
- Proprietà DISTRIBUTIVA
  $A\cup(B\cap C) = (A\cap B) \cup (A\cap C)$
  $A\cap(B\cup C) = (A\cup B) \cap (A\cup C)$

Casi particolari:

- $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = \emptyset$
- $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$

Proprietà di idempotenza:

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Def: Se $A \subseteq \Omega$, la differenza $\Omega \setminus A$ sarà detta **complementare** di A in Ω, e indicata con il simbolo A^C oppure $\overline{A}$

<u>Leggi di De Morgan:</u>

1) Il complementare dell'intersezione tra due insiemi è uguale all'unione dei complementari
   $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
2) Il complementare dell'unione tra due insiemi è uguale all'intersezione dei complementari
   $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

<u>Cardinalità:</u>

Def: Dato un insieme A finito, la **cardinalità** (o potenza) di A è il numero degli elementi di A, e si indica con $|A|$

Dati A e B, due insiemi, la cardinalità della loro unione è $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Probabilità

Def: si definisce **spazio degli eventi**, l'insieme universo contenente tutti gli eventi e si indica con Ω

Def: si definisce **prova** un esperimento caratterizzato da due o più possibili risultati, per il quale esiste incertezza circa il risultato che si realizzerà

Def: Un **evento** è un avvenimento, descritto da una preposizione, che può accadere o non accadere.
Chiameremo:

- **Eventi certi**, gli eventi che accadono con certezza e li indicheremo con Ω (poiché lo spazio degli eventi Ω, contiene tutto ciò che deve accadere e quindi è l'evento certo).
- **Eventi impossibili**, gli eventi che non possono mai verificarsi e si indicano con $\varnothing$
- **Eventi aleatori**, gli eventi il cui verificarsi dipende dal caso, ossia possono accadere ma senza certezza.

- **Eventi semplici**, i singoli eventi $E_i \in \Omega$, risultati della prova
- **Eventi composti**, gli eventi costituiti da operazioni tra eventi semplici
- **Eventi incompatibili**, due eventi A e B tali che il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro e, dunque, si ha $A \cap B = \varnothing$
- **Eventi esaustivi** o **compatibili**, due eventi A e B tali che il verificarsi di uno non esclude il verificarsi dell'altro e si ha $A \cup B = \Omega$

Distribuzione Di Probabilita'

Ci sono due metodi per attribuire una probabilità ad eventi semplici:

- A PRIORI, in funzione di ipotesi teoriche sulla natura degli eventi semplici
- A POSTERIORI, in funzione di misurazioni effettuate sul fenomeno che si sta studiando

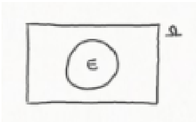
Impostazione assiomatica della probabilità:

Def: Dato uno spazio degli eventi Ω, allora la probabilità è una funzione p: Ω -> [0;1], se verifica i tre assiomi seguenti:

1. POSITIVITA'
   Per ogni $E \in \Omega$ risulta $P(E) \geq 0$
2. CERTEZZA
   Sia I un evento certo, allora $P(I)=P(\Omega)=1$
3. UNIONE
   Siano A,B due eventi incompatibili, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Legge probabilità totali:

- Siano A,B eventi incompatibili, allora $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

  Sia $E \subset \Omega$

  $p(\Omega) = \frac{area\ \Omega}{area\ \Omega} = 1$ per l'assioma 1 $\qquad p(\emptyset) = \frac{area\ \emptyset}{area\ \Omega} = 0$ per l'assioma 2

  $p(E) = \frac{area\ E}{area\ \Omega} \geq 0$ rapporto tra due aree $\qquad p(E) = \frac{area\ E}{area\ \Omega} \leq 1$ area E $\leq$ area Ω

  Se A, B sono eventi incompatibili allora $A \cap B = \varnothing$:

  $$p(A \cup B) = \frac{area\ (A \cap B)}{area\ \Omega} = \frac{area\ A + area\ B}{area\ \Omega} = p(A) + p(B)$$

- Siano A,B eventi qualsiasi, allora $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Siano A,B e C tre eventi qualsiasi, allora $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(B \cap C) - p(C \cap A)$

Probabilità evento complementare:
$p(E^C) = 1 - p(E)$

Eventi indipendenti:
Def: Due eventi A e B si dicono indipendenti se il verificarsi dell'uno NON influisce sul verificarsi dell'altro.
Due eventi A e B si dicono indipendenti se e solo se $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$

Probabilita' condizionata
Vogliamo trovare un modo per calcolare la probabilità di un evento B sapendo che è avvenuto un altro evento A. Questa informazione cambia lo spazio degli eventi; sapere che, per calcolare la probabilità richiesta l'evento A è accaduto, significa considerare solo il sottoinsieme A nell'intero spazio degli eventi => consideriamo il sottoinsieme A come il nuovo spazio degli eventi $A=\Omega$. In questa casistica l'evento B è rappresentato dall'insieme $B \cap A$. Avremo:

$$p(E) = \frac{area\ E}{area\ \Omega} \quad => \quad \frac{area\ B \cap A}{area\ A} = p(B \cap A)$$

Teorema di Bayes:
Siano due eventi A e B qualsiasi:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \qquad p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

$$p(A \cap B) = p(A|B) * p(B) \qquad p(A \cap B) = p(B|A) * p(A)$$

$$p(A \cap B) = p(A|B) * p(B) = p(B|A) * p(A)$$

$$p(B|A) = \frac{p(A|B) * p(B)}{p(A)}$$

Partizione e legge delle alterazioni
Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ **partizioni** dell'insieme Ω, ossia $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$

Teorema: $p(B) = p(B|A) * p(A) + p(B|A^C) * p(A^C)$

Frequenze
Def: si definisce **frequenza assoluta** il numero di volte in cui un certo evento E accade
Def: si definisce **frequenza relativa** la quantità $f_r = \frac{n°\ casi\ favorevoli}{n°\ casi\ possibili}$

La frequenza relativa è considerata probabilità se il numero di prove indipendenti condotte è abbastanza alto. Perché le frequenze relative misurino davvero la distribuzione di probabilità devono essere verificate tre ipotesi importanti:
1. Dev'essere possibile ripetere la prova un gran numero di volte e in condizioni pressochè costanti
2. I tentativi effettuati devono essere davvero casuali e non dipendere da fattori estranei.
3. Ciascuna misura o esperimento deve essere indipendente dalle precedenti.

Valori predittivi – test diagnostici:

Definiamo gli eventi:

M^+={individui malati} T^+= {risultato test positivo}

M^- = $(M^+)^C$ ={individui sani} T^{-} = $(T^+)^C$ = {risultato test negativo}

Definiamo gli **indici:**

- **Specificità del test (S_p)**
  = probabilità condizionata che il test sia negativo sapendo che l'individuo è sano => $p(T^{-}|M^{-})$
- **Sensibilità del test (S_e)**
  = probabilità condizionata che il test sia positivo sapendo che l'individuo è malato => $p(T^+|M^+)$

Questi indici si conoscono per via statistica => sono frequenze relative

Definiamo i **valori predittivi:**

- **Valore predittivo di esito negativo**
  $Vp^- = p(M^{-}|T^{-})$
- **Valore predittivo di esito positivo**
  $Vp^+ = p(M^+|T^+)$

Cerchiamo i valori di Vp^- e Vp^+ in funzione di Se, Sp e l'incidenza della malattia nella popolazione ($p(M^+)$); poiché questi ultimi valori derivano da dati statistici.

$$Vp^- = p(M^-|T^-) \underset{\text{BAYES}}{=} \frac{p(T^-|M^-)^{*}}{p(T^-)^{*}} = \frac{Sp(1-p(M^+))}{Sp(1-p(M^+)) + ((1-Se)\cdot p(M^+))}$$

$$^{*}p(T^-) \underset{\text{LEGGE ALTERNATIVE}}{=} p(T^-|M^-)\cdot p(M^-) + p(T^-|M^+)\cdot p(M^+) = Sp(1-p(M^+)) + (1-Se)p(M^+)$$

$$^{*}p(T^-|M^-) \underset{\text{PR. COMPLEMENTARI}}{=} 1 - p(T^+|M^+) = 1 - Se$$

$$Vp^+ = p(M^+|T^+) = \frac{p(T^+|M^+)}{p(T^+)^{*}} = \frac{Se\ p(M^+)}{Se\cdot p(M^+) + (1-Sp)(1-p(M^+))}$$

$$^{*}p(T^+) = p(T^+|M^+)\cdot p(M^+) + p(T^+|M^-)\cdot p(M^-) = Se\cdot p(M^+) + (1-p(T^-|M^-))(1-p(M^+))$$
$$= Se\ p(M^+) + (1-Sp)(1-p(M^+))$$

Equilibrio di Hardy-Weinberg

Supponiamo di avere una popolazione di individui e consideriamo un gene avente due alleli A, a; vogliamo studiare come varia la distribuzione di genotipi e fenotipi da una generazione all'altra.

- **Generazione 0**
  Definiamo: Po = p(AA), frequenza genotipo omozigote dominante
  Qo = p(Aa), frequenza genotipo eterozigote
  Ro = p(aa), frequenza genotipo omozigote recessivo

  Si ha che Po+Qo+Ro = Ω = 1

  Da questi fattori ricaviamo poi le frequenze alleliche p_o=p(A) e q_o=p(a)

$$\left.\begin{array}{l} p(AA) = p(A)^2 = p_o^2 \\ p(aa) = p(a)^2 = q_o^2 \end{array}\right] p(Aa) = 2p_oq_o \qquad \Longrightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

  Verifica: po + qo = Po + ½ Qo + Ro + ½ Qo = Po + Qo + Ro =1

- **Generazione 1**
  Voglio ricavare le frequenze dei genotipi della G1 in funzione delle frequenze dei genotipi della G0
  Definiamo: $P_1 = p(AA)$, frequenza genotipo omozigote dominante nella G1
  $Q_1 = p(Aa)$, frequenza genotipo eterozigote nella G1
  $R_1 = p(aa)$, frequenza genotipo omozigote recessivo nella G1

  $p(AA) = p(A)*p(A) = p_o * p_o = p_o^2$ => $P_1 = p_o^2$
  $p(Aa) = p(A)* p(a) = p_o* q_o$ => $Q_1 = 2* p_o q_o$
  $p(aa) = p(a)*p(a) = q_o* q_o = q_o^2$ => $R_1 = q_o^2$

  Ragionando come prima, le frequenze della G1 saranno:
  $p_1 = P_1 + ½ Q_1 = p_o^2 + ½*2 p_oq_o = p_o^2 + p_oq_o = p_o(p_o+q_o) = p_o$
  $q_1 = R_1 + ½ Q_1 = q_o^2 + ½*2 p_oq_o = q_o^2 + p_oq_o = q_o(q_o+p_o) = q_o$

- **Generazione 2**
  Tramite p_1, q_1 calcolo P_2, Q_2, R_2

  $p(AA) = p(A)*p(A) = p_1 * p_1 = p_1^2$ => $P_2 = p_1^2 = p_o^2$
  $p(Aa) = p(A)* p(a) = p_1* q_1$ => $Q_2 = 2* p_1 q_1 = 2*p_oq_o$
  $p(aa) = p(a)*p(a) = q_1* q_1 = q_1^2$ => $R_2 = q_1^2 = q_o^2$

Le frequenze alleliche e genotipiche si sono conservate nelle generazioni, questa conservazione di dati prende il nome di **equilibrio di Hardy-Weinberg** e si può applicare solamente in popolazioni ideali => no selezione naturale o migrazioni di individui.

Esperimenti binomiali o di Bernoulli
Denomino **esperimento binomiale** o di **bernoulli**, un esperimento che abbia solamente 2 possibili esiti:
- Successo p
- Insuccesso 1-p

Avremo che la probabilità di avere k successi in n prove effettuate è:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Calcolo combinatorio

Principio base: se devi compiere k scelte, e per la scelta i-esima hai n_i alternative possibili, allora il numero totale di alternative possibili per la k scelte è $n_1 * n_2 * \dots * n_k$

Disposizioni

Def: una **disposizione** di n elementi di classe k (1≤k≤n) è una qualunque disposizione ordinata di essi

$$D_{n,k} = \#possibili\ scelte\ ordinate = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Def: una **disposizione con ripetizione** di n elementi con classe k è una disposizione ordinata in cui considero anche i

raggruppamenti aventi elementi ripetuti

$$D_{n,k} = n^k$$

Def: una disposizione di classe n di n elementi viene chiamata **permutazione** di n elementi

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)\dots(n-k-1) = n!$$

Combinazioni

Def: una **combinazione** di n elementi di classe k è un sottoinsieme di k elementi presi dagli n

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Esperimenti binomiali o di Bernoulli

Considero un esperimento con due soli esiti che classifico in:

- P -> successo
- Q=1-P -> insuccesso

E ripeto l'esperimento n volte. La probabilità di avere esattamente k successi in n prove è data da: $B_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Elementi di statistica

In molte situazioni sperimentali ci troviamo con un set di dati (dello stesso tipo) che è necessario ricondurre ad un solo numero che chiameremo $\bar{x}$

Se un dato generico $x_i = \bar{x}$ allora esso è perfettamente rappresentato da $\bar{x}$. Se $x_i = \bar{x}$, il valore $\bar{x}$ rappresenta il dato x_i solo se si considera l'**errore** o **scarto** ($\bar{x}$-x_i).

La media

Def: Dati dei valori $x_1,\dots,x_n$, definiamo **media aritmetica** ($\bar{x}$) l'unico numero reale per cui gli errori negativi bilanciano esattamente

quelli positivi

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i$$

Proprietà della media:

- **Minimizza gli scarti**
  Ossia bilancia gli errori negativi con quelli positivi rendendoli meno influenti

  Definiamo una funzione $f(x) = \sum_{i=1}^{n}(x_1 - x_n)^2$ (somma degli scarti elevata al quadrato per non considerarne il segno), allora $f(\bar{x}) \leq f(x)$ per ogni $x \in R$

Def: Dati dei valori $x_1,\dots,x_n$ in cui alcuni dati compaiono con frequenze diverse f_i, definiamo **media ponderata**, il valore:

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + \cdots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

La media risente della presenza di valori estremi nei dati: un solo dato estremo può spostare il valore della media in modo significativo. Per questo motivo la presenza di dati anomali va considerata con attenzione. In ogni caso, più i dati sono distribuiti in modo uguale su entrambi i lati della media, più la media è rappresentativa dei dati nel loro.

Interpretazione probabilistica dei pesi:

$$p_i = \frac{f_i}{F} \qquad \bar{x} = \sum_{i=1}^{k} p_kx_k$$

p_i rappresenta la probabilità che un elemento scelto a cas tra gli F abbia valore x_i

La Mediana

Def: Dati dei valori $x_1,\dots,x_n$ ordinati, ossia $x_1<\dots<x_n$, la **mediana** dei dati è un numero M tale che esattamente metà dei dati è $\leq$ M e metà è $\geq$ M

$$M = \begin{cases} x_{\frac{(n+1)}{2}} & se\ n\ \text{è}\ dispari \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & se\ n\ \text{è}\ pari \end{cases}$$

Proprietà mediana:

- Anche la mediana **minimizza la funzione somma degli scarti**

Consideriamo $x_1, \dots, x_n$ ordinati con ordine crescente ($x_1< \dots < x_n$) e definiamo **mediana** il valore:

$$M = \begin{cases} x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1} & se\ \frac{n}{2}\ non\ \text{è}\ intero \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & se\ \frac{n}{2}\ \text{è}\ intero \end{cases}$$

Quartili
I quantili si riferiscono ad una suddivisione in 4 parti uguali (dette anche classi).
Def: Dati dei valori $x_1,\dots,x_n$, e suddiviso l'insieme di tali valori in 4 parti distinte, si dicono **quartili** i 3 valori agenti da limiti superiori
per i 4 sottoinsiemi prima citati.

Primo quartile: unità di osservazione che ha la proprietà di avere sotto di sé un quarto dei dati della distribuzione

$$\begin{cases} x_{\left[\frac{n}{4}\right]+1} & se\ \frac{n}{4}\ è\ intero \\ \frac{x_{\frac{n}{4}} + x_{\frac{n}{4}+1}}{2} & se\ \frac{n}{4}\ non\ è\ intero \end{cases}$$

Secondo quartile= mediana

Terzo quartile:

$$\begin{cases} x_{\left[\frac{3n}{4}\right]+1} & se\ \frac{3n}{4}\ è\ intero \\ \frac{x_{\frac{3n}{4}} + x_{\frac{3n}{4}+1}}{2} & se\ \frac{3n}{4}\ non\ è\ intero \end{cases}$$

La moda:
Def: dato un insieme di dati x1, … , xn la **moda** è il valore più frequente nell'insieme.

Indici di dispersione dei dati:
La misura della media non dà indizi sulla reale dispersione dei dati, cioè quanti sia effettivamente ampio l'insieme dei dati considerato.

Esempio:
Range dati 1:
-2,-1,0,1,2
Media = 0
Range dati 2:
-1000, -999, … 0, … , 999, 1000
Media = 0

La media è uguale ma il range considerato è notevolmente diverso.

Introduciamo degli indici per dare un'idea sull'ampiezza dell'insieme dati considerato:
Siano $x_1, \dots, x_n$ dati ordinati, si definisce:

- **Intervallo di variabilità** come l'indice di dispersione dei dati $\delta = x_{max} - x_{min}$
- **Varianza** è la media degli scarti della media elevati al quadrato
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2 = \frac{1}{F}\sum_{i=1}^{k} f_i(\bar{x} - x_i)^2$$
- **Deviazione standard** è la radice della varianza
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
- **Coefficiente di variazione** è il rapporto tra la deviazione standard e la media ed è adimensionale
$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Proprietà della varianza:
Dati $x_1, \dots, x_n$, $\sigma^2 = media(x_i^2) - [media(x_i)]^2$

Retta di regressione

L'analisi di regressione bivariata parte dall'ipotesi che vi sia una relazione asimmetrica (casuale) tra una coppia di variabili x e y.

L'idea di fondo è di descrivere la relazione tra le due variabili in modo tale da rendere possibile l'utilizzo dei valori di una variabile (indipendente) per prevedere i valori dell'altra (dipendente). Il tipo di relazione ricercata è quella lineare, ossia una retta di equazione generale y=mx+q.

Con valore assoluto tutti gli scarti sono uguali
Elevando al quadrato, se l'errore è < 1 ho uno scarto piccolo
se l'errore è > 1 ho uno scarto grande
⟹ non consideriamo gli errori grandi.

I parametri m e q si dicono anche **coefficienti di regressione** ed hanno un preciso significato.

- Il parametro m è una stima dei valori di y nel caso in cui x=0
- Il parametro q indica quanto varia y in corrispondenza di una variazione unitaria di x; in altre parole, indica cosa succede a y al variare di x (varia di una unità)

Come si calcolano i coefficienti di regressione:

$$\bar{m} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Dove $\bar{y} = media\ (y_i)$ e $\bar{x} = media\ (x_i)$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\bar{q} = \bar{y} - \bar{m}\bar{x}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

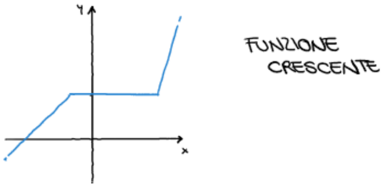
$$\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)(-1)(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)(x_i - \bar{x})(-1)(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)$$

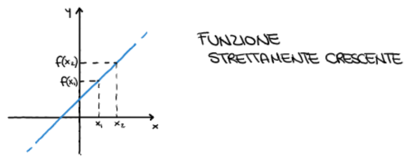
Le funzioni

Def: si definisce funzione da X in Y una relazione biunivoca tra le due variabili.

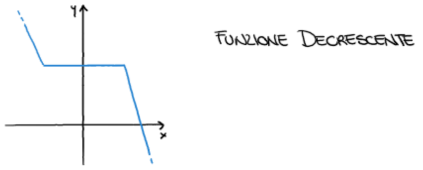
Proprietà delle funzioni:

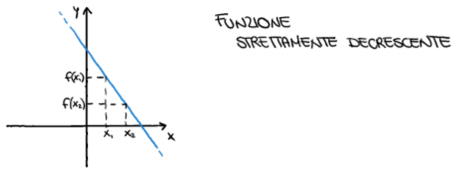
Def: Data una funzione f: $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ si dice **crescente** se dati $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$ o **strettamente crescente** se $f(x_1) < f(x_2)$





Def: Data una funzione f: $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ si dice **decrescente** se dati $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$ o **strettamente decrescente** se $f(x_1) > f(x_2)$





Def: Una funzione si dice **monotona** se il suo andamento è costante in tutto il suo dominio.

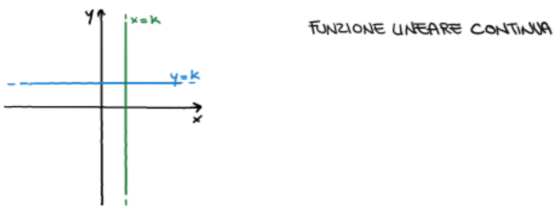
Def: Una funzione si dice **periodica** se i valori che assume in un determinato intervallo si ripetono in tutto il dominio.

Funzioni lineari:

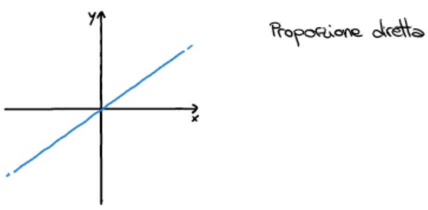
Def: Viene definita funzione lineare una funzione polinomiale avente grado pari a 0 o 1 ed è rappresentata da una retta

Tipi di funzioni lineari:

- Una funzione f è detta **costante** in A se assume lo stesso valore per tutti gli elementi di A.
  L'equazione delle funzioni costanti è del tipo y=k oppure X=k con $k \in \mathbb{N}$
  La retta che le rappresenta ha andamento costante e sarà parallela all'asse x, se ha equazione y=k, o all'asse y, se ha equazione x=k.



- Una funzione lineare rappresenta una relazione di **diretta proporzionalità** tra variabile indipendente X e la variabile dipendente y.
  Questo tipo di funzione ha equazione generale: y=ma + q
  Il suo grafico è una retta obliqua.

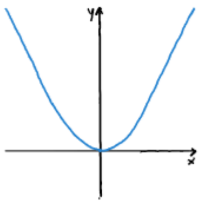


Funzioni allometriche:

Def: Si definiscono, più in generale, funzioni potenza o **allometriche**, le funzioni del tipo $y=kx^n$ con n numero intero.

Distinguiamo 4 casi generali:

1. N positivo e pari
   Dove i grafici sono relativamente simili alla parabola

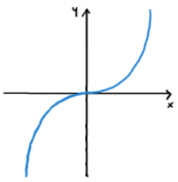
   

   F. $y=x^n$ con $n>0$, n pari

   Caratteristiche:
   - Dominio: $\mathbb{R}$
   - Codominio: $[0, +\infty[$
   - $f(x)=0$ se e solo se $x=0$; $f(x)>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
   - $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

   Si dicono **funzioni quadratiche** le funzioni del tipo $y=mx^2+q$

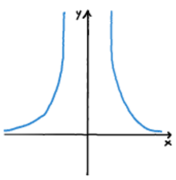
2. N positivo e dispari
   Dove i grafici sono del tipo:

   F. $y=x^n$ con $n>0$, n dispari

   Caratteristiche:
   - Dominio: $\mathbb{R}$
   - Codominio: $\mathbb{R}$

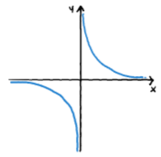
3. N negativo e pari
   Dove i grafici sono del tipo:

   F. $y=x^n$ con $n<0$, n pari

   Caratteristiche:
   - Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$
   - Codominio: $]0, +\infty[$
   - $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

4. N negativo e dispari
   Dove i grafici sono relativamente simili all'iperbole equilatera

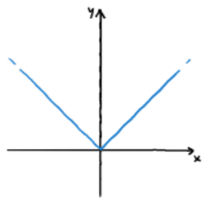


F $y = x^n$ con $n<0$, n dispari

Caratteristiche:
- Dominio: ℝ- {0}
- Codominio: : ℝ- {0}
- f(x) = - f(-x) per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

Una funzione avente equazione $y = \frac{k}{x} + q$ è una funzione rappresentante una **proporzionalità inversa** tra le due variabili.

<u>Funzione valore assoluto:</u>
Funzione avente equazione contenente un valore assoluto. Consideriamo, ad esempio y=|x|, si ha che per x<0 il grafico



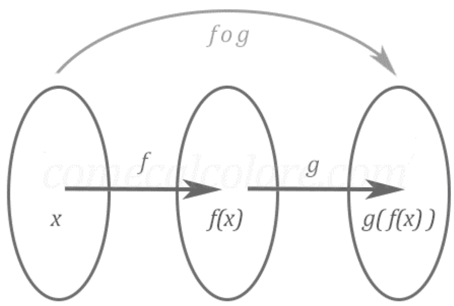
FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

della funzione coincide con quello della semiretta di equazione y=-x e per x≥0 con quello della semiretta y=x

Caratteristiche:
- Dominio: ℝ
- Codominio: [0, +∞ [
- f(x)≥0 per ogni $x \in \mathbb{R}$; f(x)=0 se e solo se x=0
- f(x) = f(-x) per ogni $x \in \mathbb{R}$

<u>Funzioni composte:</u>
La **funzione composta** è una funzione che si ottiene mediante l'operazione di composizione di due funzioni. In sintesi la funzione composta si definisce applicando la seconda funzione alle immagini della prima.

Def: Date due funzioni f: A→B e g: B→C, definiamo **funzione composta** la funzione h: A→C.



Per costruirla partiamo dall'elemento x∈A e applichiamo la funzione f: otterremo l'immagine f(x)∈B. Ora applichiamo ad f(x) la funzione g: otterremo l'immagine di f(x) in C, ossia l'elemento g(f(x)).
Date y=f(x) e z=g(x) la funzione composta **f∘g=g(f(x))**

Grafici di funzioni:

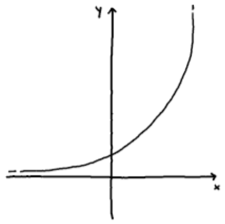
Nota l'espressione analitica di una funzione y=f(x), in alcuni casi è possibile ricavarne il grafico tramite trasformazioni geometriche applicate su una funzione z=g(x) avente grafico già noto.

	Agisco sulla funzione g(x)	Agisco sulla variabile x
Addizione/sottrazione di k	**f(x)=g(x)+k** app. traslazione verticale v=(0,k)	**f(x)=g(x+k)** app. traslazione orizzontale v=(-k,0)
Moltiplicazione per k	**f(x)=k*g(x)** app. dilatazione verticale di k	**f(x)=g(k*x)** app. contrazione orizzontale di k
Divisione per k	**f(x)=g(x)/k** app. contrazione verticale di k	**f(x)=g(x/k)** app. dilatazione orizzontale di k
Moltiplicazione per -1	**f(x) = -g(x)** app. ribaltamento rispetto all'asse y	**f(x)= g(-x)** app. ribaltamento rispetto all'asse x
Valore assoluto	**f(x)=|g(x)|** app. ribaltamento per y<0 rispetto all'asse x	**f(x)=g(|x|)** app. ribaltamento per x<0 rispetto all'asse y

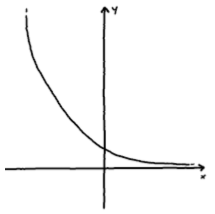
Esponenziali e logaritmi

Def: Una funzione f(x) della forma y=a^x avente a>0 è detta **funzione esponenziale.**
Si distinguono tre casi per tracciarne il grafico:

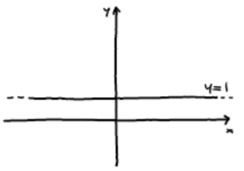
1. a>1



2. 0< a <1

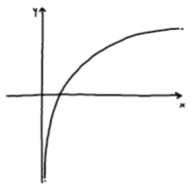


3. a=1

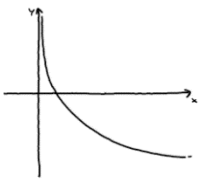


Def: Una funzione f(x) della forma $y = \log_a x$ avente x≥0, a>0 è detta **funzione logaritmica**
Si distinguono tre casi per tracciarne il grafico:

1. a>1



2. 0< a <1



La base naturale:
Tra le funzioni esponenziali e logaritmiche, si incontrano con particolare frequenza quelle la cui base è il numero di Nepero: e=2.7. Avremo quindi per esponenziale e^x e per logaritmo $\log_e x = \ln x$.

Proprietà dell'esponenziale:
Derivano dalle proprietà delle potenze:

<u>Proprietà del logaritmo:</u>

1. **Logaritmo di un prodotto**

   Def: Dato a∈R, a≠1, il logaritmo in base a del prodotto di due numeri reali positivi è uguale alla somma dei logaritmi in base a dei singoli fattori.

   $\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$
2. **Logaritmo di un quoziente**

   Def: Dato a∈R, a≠1, il logaritmo in base a del quoziente di due numeri reali positivi è uguale alla differenza dei logaritmi in base a del dividendo e del divisore.

   $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
3. **Logaritmo di una potenza**

   Def: Dato a∈R,a>0, a≠1, il logaritmo in base a della potenza ad esponente reale di un numero positivo è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo in base a del numero assegnato.

   $\log_a(b^n) = n * \log_a b$
4. **Cambiamento di base**

   $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

   Con a>0, b>0, c>0 e a≠1, c≠1

I limiti

Def: Sia y=f(x) una funzione definita in un sottoinsieme D di ℝ, diciamo che f(x) ha un **limite per x tendente a x_o** , $x_o \in \mathbb{R}$ se per ogni intorno completo I(l) di l esiste un intorno completo $I(x_0)$ di x_o tale che per ogni $x \in I(x_0)$, $x \neq x_o$ risulta che $f(x) \in I(l)$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon \text{ t. che } \forall x,\ 0 \leq |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ risulta che } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Limiti e funzioni continue

Def: Siano f(x) una funzione definita in un intervallo [a;b] e x_o un punto interno all'intervallo. La funzione f(x) si dice **continua** nel punto x_o quando esiste il limite di f(x) per x-> x_o e tale limite è uguale al valore $f(x_o)$ della funzione calcolata in x_o.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Limiti per eccesso e per difetto

Def: Se f(x) è una funzione che ha limite finito l per x che tende a x_o e, inoltre, in un intervallo di x_o con al più $x \neq x_0$, assume sempre valori maggiori di l si dice che f(x) **tende ad l per eccesso** e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+ \implies \text{condizione } 0 < f(x) - \ell < \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon > 0$$

Def: Se f(x) è una funzione che ha limite finito l per x che tende a x_o e assume sempre valori minori di l in un intorno di x_o, con al più $x \neq x_0$, allora si dice che f(x) **tende ad l per difetto** e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^- \implies \text{condizione } -\varepsilon < f(x) - \ell < 0 \quad \text{con } \varepsilon > 0$$

Limite destro e limite sinistro

Def: La definizione di **limite destro** è analoga a quella di limite con la differenza che la disuguaglianza $|f(x) - l| < \varepsilon$ deve essere verificata per ogni $x \in$ ad un intorno destro di x_o. Per il **limite sinistro** questa disuguaglianza deve essere verificata per ogni $x \in$ ad un intorno destro di x_o.

LIMITE DESTRO:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \left] x_0 ; x_0 + \delta_\varepsilon \right[\text{ risulta } |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

LIMITE SINISTRO:

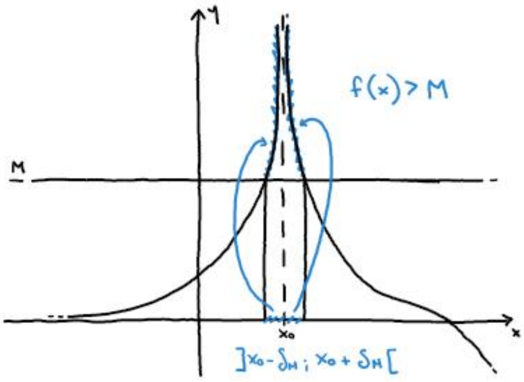
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \left] x_0 - \delta_\varepsilon ; x_0 \right[\text{ risulta } |f(x) - l| < \varepsilon$$

Il $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ esiste $\leftrightarrow$ è verificato che $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

Definizione di limite = ∞

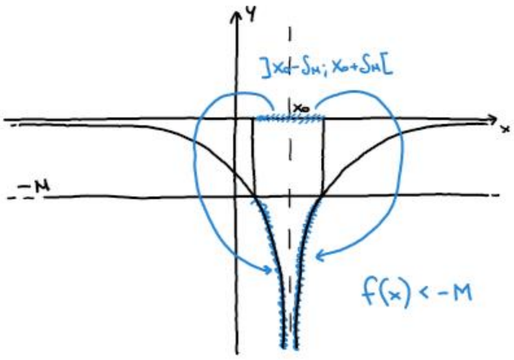
Def: Sia y=f(x) definita in $D_f \subset \mathbb{R}$ e sia x_o punto di accumulazione per D_f, diciamo che **f(x) tende a +∞ per x tendente a x_o** e scriviamo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M > 0,\ \exists \delta_M > 0 \text{ t. che } \forall x \in \,]x_0 - \delta_M ; x_0 + \delta_M[, \ x \neq x_0 \text{ si ha } f(x) > M$$



Def: Sia y=f(x) definita in $D_f \subset \mathbb{R}$ e sia x_o punto di accumulazione per D_f, diciamo che **f(x) tende a -∞ per x tendente a x_o** e scriviamo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M > 0,\ \exists \delta_M > 0 \text{ t. che } \forall x \in \,]x_0 - \delta_M ; x_0 + \delta_M[, \ x \neq x_0 \text{ si ha } f(x) < -M$$



In generale diremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \ \vee \ \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Definizione di limite tendente a ∞

Def: Sia f(x) definita in D_f, si dice che **f(x) tende ad l per x che tende a +∞** se, comunque scelto un numero reale positivo ε, si può determinare un intorno I di +∞ tale che |f(x)-l|<ε e si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists c > 0 \ \big| \ |f(x) - \ell| < \varepsilon,\ \forall x > c$$

Def: Sia f(x) definita in D_f, si dice che **f(x) tende ad l per x che tende a -∞** se, comunque scelto un numero reale positivo ε, si può determinare un intorno I di -∞ tale che |f(x)-l|<ε e si scrive:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists c > 0 \ \big| \ |f(x) - \ell| < \varepsilon,\ \forall x < -c$$

Definizione di limite tendente a ∞ = ∞

Def: Sia y=f(x) definita in $D_f \subset \mathbb{R}$ illimitato (superiormente illimitato o inferiormente illimitato), diciamo:

∞ CONCORDI

① $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\longleftrightarrow \forall M>0, \exists K_M \mid \forall x > K_M,\ f(x) > M$

② $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\longleftrightarrow \forall M>0, \exists K_M \mid \forall x < -K_M,\ f(x) < -M$

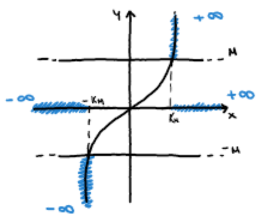
∞ DISCORDI

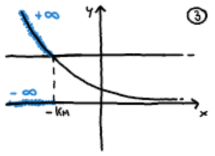
③ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

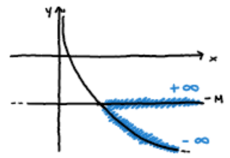
$\longleftrightarrow \forall M>0, \exists K_M \mid \forall x < -K_M,\ f(x) > M$

④ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\longleftrightarrow \forall M>0, \exists K_M \mid \forall x > K_M,\ f(x) < -M$



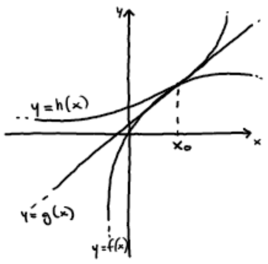




Teorema del confronto (o dei carabinieri):

Teorema: Siano y=f(x), z=g(x) e t=h(x) tre funzioni definite in D, escluso al più il punto $x_o \in D$ e sia $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per ogni $x \in D$ avremo che:

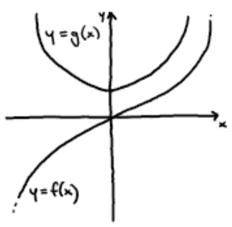
$$\text{se } \lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} h(x) = l \text{ allora } \exists \lim_{x\to x_o} g(x) = l$$



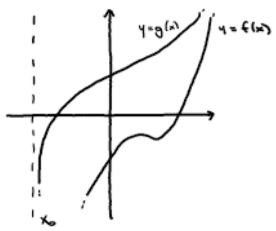
Conseguenze:

1. Siano f(x) e g(x) due funzioni tali che $|f(x)| \leq |g(x)|$, per ogni $x \in D$, avremo che se $\lim_{x\to x_o} g(x) = 0$ allora $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$

2. Siano f(x) e g(x) due funzioni tali che $f(x) \leq g(x)$, per ogni $x \in D$, avremo che se $\lim_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ allora $\lim_{x\to x_o} g(x) = +\infty$



3. Siano f(x) e g(x) due funzioni tali che $f(x) \leq g(x)$, per ogni $x \in D$, avremo che se $\lim_{x\to x_o} g(x) = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_o} f(x) = -\infty$



Algebra dei limiti – operazioni

Prodotto di una funzione avente limite finito e una costante

Sia data f(x) avente $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ e una costante k con $l, k \in \mathbb{R}$, allora:

- $\lim_{x \to x_o} k * f(x) = k * l$

Operazioni tra limiti di funzioni NON aventi entrambe limite finito

Siano date f(x) e g(x) tali che esistano i limiti delle funzioni per x->x_o e non siano entrambi finiti, allora

- **Somma**

  $\lim_{x \to x_o} [f(x) + g(x)] =$

	m	+∞	-∞
l	l+m	+∞	-∞
+∞	+∞	+∞	?
-∞	-∞	?	+∞

? = forma indeterminata [+∞ - ∞]

- **Prodotto**

  $\lim_{x \to x_o} [f(x) * g(x)] =$

	m	+∞	-∞	0
l	l*m	+∞ se l>0 -∞ se l<0	-∞ se l>0 +∞ se l<0	0
+∞	+∞ se m>0 -∞ se m<0	+∞	-∞	?
-∞	-∞ se m>0 +∞ se m<0	-∞	+∞	?
0	0	?	?	0

? = forma indeterminata [∞*0]

- **Quoziente**

  $\lim_{x \to x_o} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] =$

	m	+∞	-∞	0
l	l/m	0^+ se l>0 0^- se l<0	0^- se l>0 0^+ se l<0	∞
+∞	+∞ se m>0 -∞ se m<0	?	?	∞
-∞	-∞ se m>0 +∞ se m<0	?	?	∞
0	0	0	0	?

?=forme indeterminate

Altre operazioni:
Sia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, allora

- **Polinomio**

$$\lim_{x \to x_o} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} \pm\infty \; se \; n > m \\ \frac{a_n}{b_m} \; se \; n = m \\ 0 \; se \; n < m \end{cases}$$

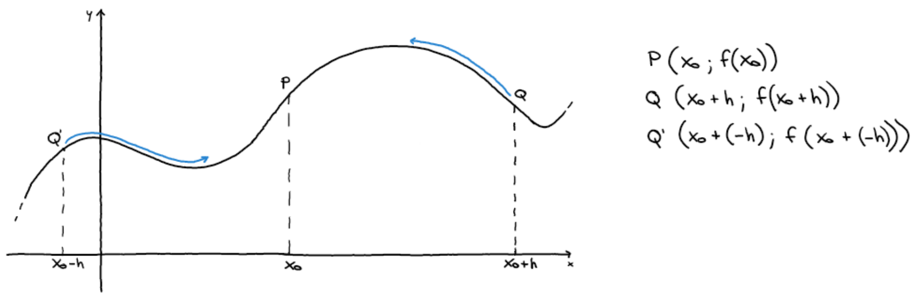
- **Potenza**
  $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = l^n \quad \text{con } n \neq 0$
- **Radice**
  Ipotesi l>0
  $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
- **Logaritmo**
  Ipotesi l>0
  $\lim_{x \to x_0} \log_a f(x) = \log_a l \quad con \; a > 0, a \neq 1$
- **Esponenziale**
  $\lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^l \quad con \; a > 0, a \neq 1$

<u>Limiti notevoli</u>
Sono limiti si cui conosciamo già il risultato.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \; ; \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$
   In particolare: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
   In particolare: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$

Derivate

Uno dei problemi che portarono al concetto di derivata è quello della determinazione della retta tangente ad una curva in un punto.
Def: La **retta tangente t** ad una curva in un punto P è la posizione limite, se esiste, della retta secante in P e Q, al tendere (sia da destra che da sinistra) di Q a P.



Def: Data una funzione y=f(x), definita in un intervallo [a,b] e dati due diversi numeri reali x_o e x_o+h,<interni all'intervallo, si chiama **rapporto incrementale** di f(x), relativo ad x_o il numero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

Geometricamente, il rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della retta secante in P e Q.
All'avvicinarsi di Q a P la retta secante tende alla retta tangente al grafico di f(x) nel punto P e il coefficiente angolare della retta secante tende al coefficiente angolare della retta tangente.

Def: sia y=f(x) una funzione definita in un intervallo chiuso [a,b] e sia $x_o \in [a,b]$. Si dice **derivata prima di f(x) nel punto x_o** e si indica con f'(x), il limite (se esiste finito) per h tendente a 0, del rapporto incrementale della funzione relativamente al punto x_o.

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

Se esiste $f'(x_o)$ allora f(x) si dice **funzione derivabile**, ed f(x) è derivabile se:

- È definita in un intorno del punto x_o
- Esistono e coincidono limite destro e sinistro del rapporto incrementale
- Tali limiti devono essere finiti.

Def: sia y=f(x) definita in [a,b], $x_o \in [a,b]$ allora il limite destro del rapporto incrementale riferito ad x_o è chiamato **derivata prima destra** e il limite sinistro del rapporto incrementale riferito ad x_o è chiamato **derivata prima sinistra.**

DERIVATA PRIMA DESTRA $\rightarrow f'_+(x_o) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$

DERIVATA PRIMA SINISTRA $\rightarrow f'_-(x_o) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$

f(x) è derivabile in [a,b] se è derivabile in tutti i punti $x_o \in [a,b]$ ed esistono derivata prima destra nel punto a e derivata prima sinistra nel punto b.

<u>Derivata seconda:</u>

Def: Si definisce **derivata seconda** la derivata della derivata prima, se calcolabile, e si indica come $f''(x)$ oppure $\frac{d^2f}{dx^2}$

<u>Derivata n-esima:</u>

Def: Se deriviamo una funzione n volte otteniamo la **derivata di ordine n** oppure **derivata n-esima**, che si indica come $f^{(n)}$ oppure $\frac{d^nf}{dx^n}$

Continuità e derivabilità

Teorema: Sia y=f(x) definita in un intervallo [a,b] e derivabile in $x_o \in [a,b]$, allora f(x) è continua in x_o

Derivate fondamentali

- la derivata di una funzione costante è zero:
  D[k] = 0
- La derivata di una funzione del tipo y=x è uno:
  D[x] = 1
- La derivata di una funzione del tipo $f(x)=x^{\alpha}$ con $\alpha \in R$ e x>0 è $\alpha x^{\alpha-1}$:
  $D[x^{\alpha}] = \alpha x^{\alpha-1}$
  Questa regola si può usare anche per le radici, esprimendole come esponente sotto forma di frazione.
  Caso particolare: $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- La derivata della funzione esponenziale a^x è $a^x\ln(a)$:
  $D[a^x] = a^x\ln(a)$
  Caso particolare: $D[e^x] = e^x$
- La derivata della funzione logaritmica $f(x) = \log_a x$ è $\frac{1}{x}\log_a e$:
  $D[\log_a x] = \frac{1}{x}\log_a e$
  Caso particolare: D[lnx] = 1/x
- La derivata della funzione y=sen(x), con x espresso in radianti, è cos(x):
  D[senx] = cosx
- La derivata della funzione y=cos(x), con x espresso in radianti, è –sen(x):
  D[cosx] = -senx
- La derivata della funzione y=tg(x), con x espresso in radianti, è:
  $$D[tg(x)] = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tg^2(x)$$
- La derivata della funzione y=cotg(x), con x espresso in radianti, è:
  $$D[cotg(x)] = -\frac{1}{sen^2(x)}$$
- La derivata della funzione y=arcsen(x), con x espresso in radianti, è:
  $$D[arcsen(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- La derivata della funzione y=arccos(x), con x espresso in radianti, è:
  $$D[arccos(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
- La derivata della funzione y=arctg(x), con x espresso in radianti, è:
  $$D[arctg(x)] = \frac{1}{1+x^2}$$
- La derivata della funzione y=arccotg(x), con x espresso in radianti, è:
  $$D[arccotg(x)] = -\frac{1}{1+x^2}$$

Teoremi sul calcolo delle derivate:

- Sia y=f(x) una funzione derivabile in x e k una costante reale non nulla, allora:
  D[k*f(x)] = k*f'(x)
- Siano y=f(x) e z=g(x) due funzioni derivabili in x, allora f(x)+g(x) è derivabile in x e:
  D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)
- Siano y=f(x) e z=g(x) due funzioni derivabili in x, allora f(x)*g(x) è derivabile in x e:
  D[f(x)*g(x)] = f'(x)*g(x) + f(x)*g'(x)
- Sia y=f(x) una funzione derivabile in x e sia $f(x) \neq 0$, allora:
  $$D\left[\frac{1}{f(x)}\right] = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

- Siano y=f(x) e z=g(x) due funzioni derivabili in x e tali che g(x)≠0, allora f(x)/g(x) è derivabile in x e:
$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g^2(x)}$$
- Sia z=g(x) una funzione di dominio A e codominio B, derivabile in x∈A e sia y=f(x) una funzione di dominio B, derivabile in y=g(x), allora la funzione composta y=f(g(x)) è derivabile in x e:
D[f(g(x))] = f'(g(x))*g'(x)
- Se y=f(x) è una funzione derivabile in x con f'(x)≠0, allora la funzione inversa x=f^{-1}(y) è derivabile in y=f(x) e vale che:
$$D[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(x)}$$

Teorema di De L'Hopital:

Questo teorema è utile per il calcolo di limiti che si presentano sotto la forma indeterminata 0/0 oppure ∞/∞.

Teorema: Date due funzioni f(x) e g(x) definite nell'intorno I di un punto x_o, se:

1. f(x) e g(x) sono continue in x_o e $f(x_o)=g(x_o)=0$
2. f(x) e g(x) sono derivabili in I-{x_o}
3. esiste $\lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste anche $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ e risulta $\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Funzioni crescenti e decrescenti:

Teorema: sia data una funzione y=f(x), continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I, essa è:

- **crescente** in I, se in ogni punto interno di I la sua derivata prima è positiva:
se $f'(x) > 0,\ \forall x \in \,]a;b[\ \Rightarrow f(x)$ è ↗
- **decrescente** in I, se in ogni punto interno di I la sua derivata prima è negativa:
se $f'(x) < 0,\ \forall x \in \,]a;b[\ \Rightarrow f(x)$ è ↘

Teorema inverso: Data una funzione y=f(x), continua in un intervallo I e derivabile nei punti interni di I, allora:

- se f(x) è crescente in I, **f'(x)≥0**, per ogni x∈I
- se f(x) è decrescente in I, **f'(x)≤0** per ogni x∈I

Punti critici, massimi e minimi:

Def: un punto x_o in cui f'(x)=0 si dice **punto critico** o **punto stazionario** di f(x)

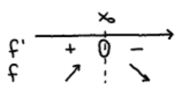
Def: un punto x_o si dice **punto di massimo locale** per f(x) se $f(x_o) \geq f(x)$ per i punti x sufficientemente vicini a x_o
Def: un punto x_o si dice **punto di minimo locale** per f(x) se $f(x_o) \leq f(x)$ per i punti x sufficientemente vicini a x_o

Osservazione: ogni punto di massimo, minimo locale o flesso a tangente orizzontale rappresenta un punto critico per la funzione f(x)

Def: un punto x_o è detto punto di **massimo globale** per la funzione f(x) se $f(x) \leq f(x_o)$ per ogni $x \in D_f$
Def: un punto x_o è detto punto di **minimo globale** per la funzione f(x) se $f(x) \geq f(x_o)$ per ogni $x \in D_f$

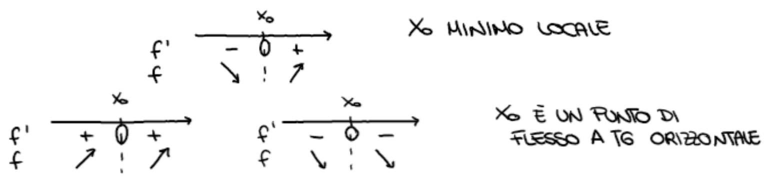
Teorema: sia y=f(x) una funzione definita e continua in un intorno completo I_{x_o} del punto x_o e derivabile per ogni x, x≠ x_o, $x \in I_{x_o}$, se:

1. per ogni $x \in I_{x_o}$, si ha f'(x)>0 quando x< x_o e f'(x)<0 quando x> x_o, allora x_o è un punto di **massimo locale** per f(x) in I

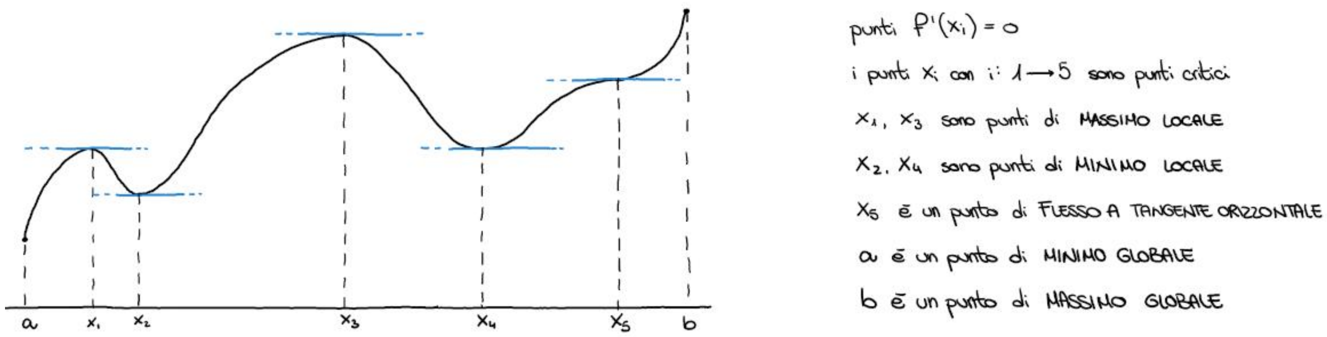


X₀ MASSIMO LOCALE

2. per ogni $x \in I_{x_o}$, si ha $f'(x)<0$ quando $x< x_o$ e $f'(x)>0$ quando $x> x_o$, allora x_o è un punto di **minimo locale** per f(x) in I



3. se il segno di $f'(x)$ è lo stesso per ogni $x \neq x_o$ allora x_o non è un punto estremante ma un punto di **flesso a tangente orizzontale**

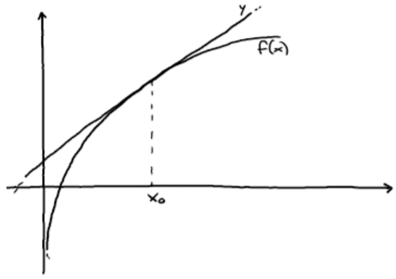


Teorema: In generale, supponendo che si possa derivare la funzione f(x) n volte in x_o e si abbia $f'(x_o) = f''(x_o) = \ldots = f^{(n-1)}(x_o) = 0$ e $f^{(n)}(x_o) \neq 0$, allora, per dedurre la natura del punto critico, distinguiamo 3 casi:

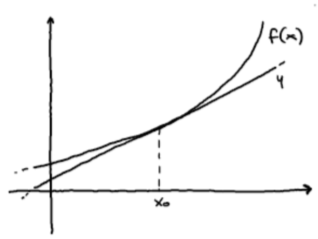
- Se n è dispari allora x_o è un punto di flesso
- Se n è pari e $f^{(n)}(x_o)>0$ allora x_o è un punto di minimo locale
- Se n è pari e $f^{(n)}(x_o)<0$ allora x_o è un punto di massimo locale

Concavità, convessità e flessi:

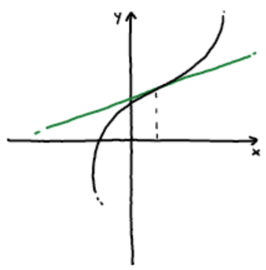
Def: Una funzione f(x) si dice **concava** in x_o se vicino a questo punto, il grafico di f non è mai al di sopra della retta tangente al grafico in x_o

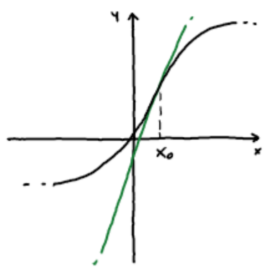


Def: una funzione f(x) si dice **convessa** se vicino ad un punto x_o il grafico di f(x) non è mai al di sotto della retta tangente al grafico in x_o.



Def: si dice che una funzione f(x) ha un **flesso** nel punto x_o se in tale punto il grafico di f attraversa la retta tangente in x_o, ossia se a sinistra di x_o e vicino a x_o il grafico di f si trova al di sotto della retta tangente e a destra di x_o e vicino a x_o il grafico di f(x) si trova al di sopra della retta tangente, o viceversa.





Concavità e derivata seconda:

Teorema: Sia y=f(x) una funzione definita e continua in un intervallo I, insieme con le sue derivate prima e seconda, e sia x_o un punto interno a questo intervallo. Se in x_o è $f''(x_o)\neq 0$, il grafico della funzione volge in x_o:

- La concavità verso l'alto se $f''(x_o)>0$
- La concavità verso il basso se $f''(x_o)<0$