U N I V E R S I T A’ D E G L I S T U D I D I T R I E S T E

CENTRO INTERDIPARTIMENTALE PER LA RICERCA DIDATTICA
Via A. Valerio 12/1, 34127 Trieste, Italia
Tel.: +39 040 558 2659
Fax: +39 040 558 2660
email: cird@units.it

CIRD

http://www.units.it/cird/

Laboratorio Multidisciplinare di Formazione per Insegnanti a.a. 2010/2011 –

6 ottobre 2010

Geometria con piegature della carta: costruzioni geometriche, in particolare di triangoli e quadrilateri.

Marina Rocco

Si trovano articoli, anche on line, che nel titolo citano unitamente la geometria e l'origami. Segnalo, ad es., che in Bascetta., 1998 si trova un parallelo tra gli assiomi euclidei e gli “assiomi della geometria con la carta”; tuttavia vorrei precisare che ogni costruzione di origami coinvolge molta geometria, ma non tutte le volte che si piega della carta si fa origami.

Piegare carta vuol dire usare una riga e un compasso un po' particolari. Ne deriva, per conseguenza, che le costruzioni proposte fanno riflettere sulle proprietà delle figure da realizzare. Questo è l'obiettivo che perseguivo con i miei alunni, nonché quello principale del laboratorio, che propone l'esemplificazione di alcune costruzioni geometriche, fondamentalmente mostrando “come si fa”.

Ricordo con piacere le attività più soddisfacenti tra quelle usualmente proposte ai miei ragazzi, che provenivano proprio da un sapere come si fa, legato a problemi che (con la manipolazione di oggetti concreti) possono trovare una soluzione capace di creare un conflitto cognitivo. I problemi e le loro soluzioni trovavano in seguito la giusta collocazione nel curriculum che andavo delineando per i miei alunni. Anche le costruzioni qui proposte erano inserite in un lungo percorso didattico, esposto in Appendice, ma si prestano ad altri impieghi.

1. Materiali

Un percorso didattico che si serva di piegature della carta necessita dei seguenti materiali:

- *fogli di carta bianca;*
- *pennarelli colorati, sia a punta grossa che a punta fine;*
- *evidenziatori di colori diversi.*

Per la carta sono possibili più scelte:

- carta per stampanti o fotocopiatrici, da 80 g/m^2 formato A4: va bene per i più piccoli o per i

meno abili, che rischiano di strappare altre carte;
- carta da 60 g/m^2 formato A4 (si trova anche in blocco per note): si lavora con più precisione e facilita i passaggi in cui un punto, una retta o altre figure debbano esser visti in trasparenza, ad esempio sulle due facce del foglio;
- modulo continuo per stampanti: spesso ancora più leggero della precedente, ne conserva i vantaggi e si potrebbe avere a costo zero se lo si trova inutilizzato in qualche ufficio;
- carta da forno: per lavori di precisione o dimostrativi.

A prescindere dal "peso", è essenziale che la carta non abbia tracce di struttura: non a righe o quadretti, ma bianca ed informe, cioè ogni foglio va preparato stappandone il bordo per ricavare un ritaglio (più grande possibile) che non ricordi più il rettangolo da cui è stato ricavato.

Pennarelli ed evidenziatori possono far parte dei beni condivisi dalla classe; se si lavora con carta da forno, bisogna sostituirli con matite di vari colori.

2. Piano e rette

Il foglio preparato come su descritto è un modello di *piano*, buono come qualunque modello concreto di un ente ideale. Certamente il foglio può curvarsi nello spazio: allora bisogna imporre che, almeno in certi momenti, sia "giacente" su un altro modello di piano altrettanto buono ma meno deformabile, come il piano di un banco.
La preparazione del foglio stappandone il bordo ha un duplice scopo, uno dei quali, già citato, è la necessità di eliminarne la struttura; l'altro è quello di migliorare il modello di piano, suggerendo che, eseguendo diversamente gli strappi, il foglio avrebbe potuto essere più grande, ancora più grande, … infinito!

Pieghiamo il foglio: se le parti esistenti aderiscono bene, la piega è stata eseguita cor***retta***mente (si vedano le etimologie di giusto, retto, dritto, diritto e la possibilità, almeno in certe locuzioni, di considerarli sinonimi), cioè la piega è un buon modello di *retta*, con limiti e potenzialità pari a quelle del nostro modello di piano.
Possiamo assumere che *nel piano esistono infinite rette*, poiché oltre a quella già eseguita ne possiamo fare quante altre si vogliono.

3. La nostra riga

L'azione dell'eseguire una piega cor***retta***mente sostituisce la riga; però, se dobbiamo eseguire una costruzione geometrica, non basta appoggiare gli strumenti dove occorre, vogliamo anche tener traccia delle posizioni di volta in volta occupate. Il segno che la piega lascia nel foglio è di per sé la traccia in questione, ma potremmo aver bisogno di metterla in risalto: si può passare un pennarello contro la traccia della piega con i due lembi del foglio tenuti parzialmente aperti.

4. Rette incidenti e punti

Procedendo come al punto 2, eseguiamo una piega e, dopo aver riaperto il foglio, facciamone un'altra. Abbiamo ora due rette evidenziate nel nostro piano e può capitare di vedere che esse si tagliano a vicenda entro lo spazio concreto del nostro pezzo di carta: diremo che le *rette* sono *incidenti* e che hanno in comune un oggetto cui diamo il nome di *punto*. Poiché avremmo potuto scegliere in "molti" altri modi la seconda retta, alla prima appartengono altrettanti punti. Con altre pieghe possiamo vedere che lo stesso capita alla seconda retta e così via fino ad assumere che: *ad una retta appartengono infiniti punti; per ogni retta esistono punti del piano che non le appartengono; nel piano esistono infiniti punti*.
E se non si vede che le rette si tagliano dentro al foglio? Per ora diciamo che, forse, se il foglio fosse stato strappato in un altro modo e quindi fosse stato più grande, avremmo visto l'intersezione.

5. Semipiani ed angoli

Una retta divide il piano in due parti, ciascuna delle quali si dice *semipiano*; due rette che si intersecano dividono il piano in quattro parti, ciascuna delle quali si dice *angolo*.
La dimostrazione che *angoli opposti al vertice sono congruenti* è identica a quella tradizionale, ma la carta piegata consente al docente una gestualità didatticamente molto efficace.

6. Rette perpendicolari e angoli retti

Disegniamo una retta (=pieghiamo il foglio) e pieghiamo nuovamente senza riaprire. Quando apriamo il foglio vediamo che la prima piega corrisponde ad una retta e forse la seconda piega no; il piano è stato diviso in quattro angoli a due a due *supplementari* (=la loro somma è pari a due angoli retti, cioè un *angolo piatto*) o congruenti, ma questi ultimi non sono opposti al vertice.
È possibile fare la seconda piega in modo che aprendo il foglio si vedano due rette, se si fa in modo che i quattro angoli siano tutti congruenti: allora le rette si dicono *perpendicolari* e gli angoli si dicono *angoli retti*.

6.a Costruzione di rette perpendicolari

Eseguiamo una piega e, senza riaprire il foglio, facciamone un'altra, ponendo attenzione a far combaciare su se stesso il bordo della prima piega. Potrebbe darsi che la seconda piega debba passare per un certo punto, appartenente o no alla prima: è solo questione di manualità e di qualche accorgimento (vedi paragrafo 9).

7. Rette parallele

Leggiamo il Postulato 5 di Euclide:

> Se una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli coniugati interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette si incontrano dalla parte detta.

Allora, posto che gli angoli retti siano tutti uguali (ed Euclide vi dedica un postulato!), parafrasando il Postulato 5 si ha che:

> Se una retta, intersecando due altre rette, forma con esse solo angoli retti, allora queste due rette non si incontrano e diremo che sono *rette parallele*.

Se ne ricava sia il modo per costruire due rette tra loro parallele, sia la possibilità di verificare se due rette, di cui non si vede intersezione all'interno del foglio, sono incidenti.
ATTENZIONE! Due rette sono parallele anche se gli angoli coniugati interni sono supplementari (o se gli alterni interni sono congruenti, o ...)

7.a Costruzione di rette parallele

Eseguiamo una piega (1) e, senza riaprire il foglio, facciamone un'altra (2), ponendo attenzione a far combaciare su se stesso il bordo della piega (1). Sappiamo da 6.a che abbiamo ora due rette perpendicolari; apriamo la piega (2) ma non la (1) ed eseguiamo una nuova piega (3) con la stessa procedura seguita per (2). Allora (2) e (3) formano solo angoli retti con (1) e sono parallele tra loro.

7.b. E se le rette fossero di più?

Continuando con lo stesso foglio, si segni (4) perpendicolare ad (1): proseguendo in questo modo, si ottengono "tantissime" rette tutte parallele a (2), ossia un *fascio di rette parallele*.
E se invece (4) fosse stata perpendicolare a (2)?

8. Note

In classe le tracce delle pieghe venivano man mano fatte evidenziare con i pennarelli colorati; dicevo "disegniamo una retta" e non "facciamo una piega"; rette, punti, angoli, erano indicati come di consueto, nello stesso colore usato per l'elemento da indicare. In 7.a, 7.b e nelle prossime costruzioni ho scelto invece di numerare i vari elementi nell'ordine in cui si eseguono delle pieghe, si trovano dei punti e così via.

9. Retta per due punti; segmenti

Nei paragrafi precedenti non si poneva la condizione dell'appartenenza di punti dati alle rette da costruire. Come accennato in 6.a, è solo questione di manualità; per facilitare l'esecuzione di una piega passante per due punti dati, conviene innanzi tutto marcare coi pennarelli i punti (1) e (2); quindi si inizia ad abbozzare la piega, tenendo le marcature dei punti sulla faccia in vista del foglio. Ogni mano deve stringere la carta tra pollice ed indice, inizialmente a circa 1 cm dalla posizione finale della piega ed altrettanto vicino rispettivamente ai punti (1) e (2). Alternando il lavoro di una mano con quello dell'altra, si deve avvicinare la posizione delle dita a quelle dei punti e quindi contemporaneamente ci si avvicina alla posizione voluta della piega. Quando la si raggiunge, "pizzicare" la carta in corrispondenza di (1) e (2), poi appoggiare il foglio sul tavolo e completare la piega. Un po' di esperienza sveltirà l'esecuzione …
La parte della retta così ottenuta che sta tra (1) e (2) si dice *segmento*.

10. Note

La costruzione, mutatis mutandis, si adatta per coppie di rette perpendicolari, che sia il punto per cui deve passare la seconda retta appartenente o no alla prima.
Trovare la retta per due punti dati è tanto più difficile quanto più essi sono distanti tra loro, e lo sarebbe anche in altre situazioni: si pensi, ad es., di dover tracciare un segmento lungo qualche metro nel cortile della scuola; restando nel contesto, si provi a piegare un foglio di carta per pacchi.
Se si sceglie di fare geometria piegando carta, occorre ricordare che la scelta di punti o rette iniziali (ma anche la dimensione del foglio) può essere fortemente condizionante il risultato finale, perché la figura desiderata non è completamente visibile nel foglio o perché tali scelte rendono inutilmente difficile l'esecuzione.
La definizione di segmento è "disinvolta" (vedi Appendice): volendo, le cose si aggiustano parlando di semirette in chiusura del paragrafo 6 e definendo un segmento come intersezione di due semirette. Resta il fatto che la fascia d'età degli alunni a cui sto pensando non permette una trattazione assiomatica rigorosa e per l'introduzione di postulati di cui non si sente immediata necessità si può aspettare un momento più opportuno.

11. Triangoli

Su un foglio si eseguano, riaprendolo ogni volta, tre pieghe (1), (2) e (3). Se siamo fortunati, (ricordiamo i paragrafi 4 e 7), vedremo nel foglio i punti che derivano dall'intersezione a due a due delle rette disegnate. Il piano è stato ripartito in 7 regioni, di cui 3 sono angoli, 3 sono regioni illimitate ed una è una regione limitata, che si può pensare come intersezione di tre angoli: è un *triangolo*.

11.a Costruzione di triangoli con vertici assegnati

Una o più tra le pieghe (1), (2) e (3) potrebbe dover passare per punti assegnati: occorre procedere ogni volta come detto nel paragrafo 9, ma la partizione del piano resta analoga.

11.b Un problema sui triangoli: costruzione dell'ortocentro

Si disegni un triangolo come detto nel paragrafo precedente e si indichi con (4) il punto d'intersezione fra le pieghe (1), (2). Si combini quanto visto nei paragrafi 6.a e 9 per ottenere la piega (5), perpendicolare a (3) e passante per (4); sia (6) l'intersezione fra (5) e (3): diremo che il segmento che ha per estremi (4) e (6) è un'*altezza del triangolo* e che (6) è *piede di tale altezza*.
Si proceda similmente per ottenere le altre altezze del triangolo: se l'esecuzione è accurata, esse hanno un unico punto di intersezione che si chiama *ortocentro.*
Il fatto che le tre altezze passino per un unico punto è assicurato da un teorema di cui non sembra il caso allegare la dimostrazione.

12. Problemi di approfondimento

Il punto (6) individuato nel paragrafo 11.b è sempre interno ad un lato del triangolo? Se non è così, quando capita? E l'ortocentro è sempre interno al triangolo? Se non è così, quando capita?

13. Segmenti congruenti; angoli congruenti

Nella geometria della carta piegata, diremo che due *segmenti* sono *congruenti* se esistono pieghe che sovrappongano contemporaneamente i loro estremi. Analogamente si dice per gli *angoli congruenti.*
Esistono situazioni in cui è necessaria più di una piega e comunque le pieghe necessarie risultano subordinate al problema specifico all'interno del quale dimostrare tale congruenza e sono pertanto dipendenti dalla situazione che interessa. Per sapere come individuare tali pieghe occorre il laboratorio *Geometria con piegature della carta: isometrie del piano, a partire da simmetrie assiali.*

14. Il nostro compasso

Il compasso consente il trasporto o la riproduzione di un segmento: il fatto che con esso si possano disegnare circonferenze è una conseguenza. Nella geometria della carta piegata, si trasporta un segmento effettuando pieghe opportune.

14.a Costruzione di segmenti adiacenti congruenti

Si segni sul foglio la piega (1) e su essa il punto (2). Piegare in (1) con (2) in vista; costruire (3), perpendicolare a (1) e passante per (2) secondo quanto detto nel paragrafo 6.a; senza riaprire, si pieghi perpendicolarmente ad (1): si ottengono (4) e (5), che intersecano (1) in (6) e (7).
In base alla nostra definizione, il segmento che ha per estremi (2) e (6) è congruente a quello che ha per estremi (2) e (7).

14.b Costruzione di segmenti consecutivi congruenti

Si segni sul foglio la piega (1) e su essa il punto (2). Piegare in (1) con (2) in vista; costruire (3), passante per (2) Per inciso, se riaprissimo il foglio, <u>mossa ora vietata</u>, forse (3) non è una retta: vedi paragrafo (6).
Senza riaprire, costruire (4), sempre per (2), sovrapponendo a (3) la (1).

14.b1 Pausa di riflessione

Se riaprissimo il foglio, <u>mossa ancora vietata</u>, quante rette, semirette, angoli, … ci vedremmo?

14.b2 Continua la costruzione di segmenti consecutivi congruenti

Mantenendo piegato il foglio, segnare (5), perpendicolare a (1) e (3).

14.b3 Altra pausa di riflessione

Se riaprissimo il foglio, <u>mossa tuttora vietata</u>, quanti segmenti con estremi in (2) risulterebbero tra loro congruenti in base alla nostra definizione?

14.b4

Si riapra il foglio e si confrontino le ipotesi formulate nei paragrafi 14.b1 e 14.b3 con la situazione reale. Inoltre, quanti altri segmenti sono tra loro congruenti? Si giustifichino sia questo numero che quello che risponde al paragrafo 14.b3.

15. Note

Spesso conviene non riempire il foglio di linee di costruzione. Per evitarlo, si può “pizzicare” la carta invece di effettuare una piega, specie se questa ha lo scopo di individuare dei punti; questa mossa sostituisce tutte le perpendicolari dei paragrafi 14.a e 14.b2.
La costruzione suggerita nel paragrafi 14.b, 14.b2, 14.b4 è ridondante ed è stata scelta per la possibilità di riflettere su quanto si va ottenendo; dopo aver affrontato il paragrafo 20.a, si provi ad ottimizzare la costruzione di segmenti consecutivi congruenti.
La costruzione di segmenti congruenti che non abbiano estremi in comune ha bisogno di paragrafi che seguiranno o del laboratorio *Geometria con piegature della carta: isometrie del piano, a partire da simmetrie assiali*.

16. Problemi sui segmenti

Dato un segmento, si trovino il *punto medio* e l'*asse*. Come li definiamo?

16.a Un problema sui triangoli: costruzione del baricentro

Si disegni un triangolo come detto nel paragrafo 11 e si indichino con (4), (5) e (6) i suoi vertici. Si trovi (7), punto medio del segmento di estremi (4) e (5) e si trovi il segmento per (6) e (7): esso è una *mediana* del triangolo.
Si proceda similmente per ottenere le altre mediane del triangolo: se l'esecuzione è accurata, esse hanno un unico punto di intersezione che si chiama *baricentro.*
Il fatto che le tre mediane passino per un unico punto è assicurato da un teorema di cui non sembra il caso allegare la dimostrazione.

16.b Problemi di approfondimento

Il baricentro è sempre interno al triangolo? E per altre figure?
In un triangolo, una mediana può coincidere con un'altezza? (la risposta corretta è SI/NO; per ora non si può dir altro).

16.c Un problema sui triangoli: costruzione del circocentro

Si disegni un triangolo come detto nel paragrafo 11 e si traccino gli assi dei suoi lati. Se l'esecuzione è accurata, essi hanno un unico punto di intersezione che si chiama *circocentro.*
Il fatto che i tre assi passino per un unico punto è assicurato da un teorema di cui non sembra il caso allegare la dimostrazione.

16.d Problemi di approfondimento

Il circocentro è sempre interno al triangolo? E perché mai si chiama circocentro?
Un asse può coincidere con un'altezza o con una mediana? (la risposta corretta è SI/NO; per ora non si può dir altro).

17. Triangoli "speciali"

Si riprenda il triangolo del paragrafo 11: probabilmente non ci vedremo niente di speciale.
Tuttavia, potremmo fare in modo che due lati siano congruenti (*triangolo isoscele*) o che lo siano tutti e tre *(triangolo equilatero).*

17.a Costruzione di un triangolo isoscele

Si riprenda il foglio ottenuto con 14.b3: il triangolo che ha un vertice lì indicato con (2) e gli altri negli estremi, diversi da (2), di due qualunque dei segmenti congruenti ottenuti nella costruzione, risulta essere isoscele. Si vedano però le note nel paragrafo 15: esiste un modo più semplice per ottenere un triangolo isoscele ...

18. Bisettrice di un angolo

Torniamo al paragrafo 14.b: la piega (4), ottenuta sovrapponendo (1) e (3), divide l'angolo che esse individuano in due parti congruenti (vedi paragrafo 13): diremo che (4) è la *bisettrice* dell'angolo individuato da (1) e (3).

18.a Un problema sui triangoli: costruzione dell'incentro

Si disegni un triangolo come detto nel paragrafo 11 e si traccino le bisettrici dei suoi angoli. Se l'esecuzione è accurata, essi hanno un unico punto di intersezione che si chiama *incentro.*
Il fatto che le bisettrici passino per un unico punto è assicurato da un teorema di cui non sembra il caso allegare la dimostrazione.

18.b Problemi di approfondimento

L'incentro è sempre interno al triangolo? E perché mai si chiama incentro?
Una bisettrice può coincidere con un asse, un'altezza o una mediana?

19. Nota

I paragrafi da 14 a 18 portano a dire che in un triangolo isoscele un'altezza ed una mediana coincidono con la bisettrice dell'angolo compreso tra i lati congruenti del triangolo. Quali altre osservazioni si possono fare?

20. I triangoli equilateri

I triangoli equilateri sono isosceli guardando una qualunque coppia dei loro lati, dunque ogni loro altezza coincide con una mediana e con un asse (questa è una delle risposte al paragrafo 18.b): ciò verrà sfruttato nel prossimo paragrafo.

20.a Costruzione di un triangolo equilatero

Tracciare la piega (1) ed una sua perpendicolare, (2), come detto nel paragrafo 6.a; sia (3) il loro punto d'intersezione. Tenendo il foglio piegato sia lungo (1) che lungo (2), "pizzicare" la (1): si ottengono su essa due punti, (4) e (5), estremi di un segmento che ha (2) come asse e (3) come punto medio. Dunque ogni punto di (2) unito a (4) e (5), darà un triangolo isoscele, essendo (2) sia altezza che asse e mediana. Ma noi vogliamo che il triangolo sia equilatero, quindi bisogna trovare (6) su (2) in modo che il segmento di estremi (4) e (5) sia congruente al segmento di estremi (4) e (6): useremo il "nostro compasso", creando la piega (7) che passa per (4) e porta (5) su (2); in quest'operazione, conviene tenere il foglio piegato lungo (1) con tutti gli altri elementi in vista.

21. Note

Praticamente tutte le costruzioni suggerite sui triangoli, le osservazioni e gli spunti dei relativi paragrafi, coinvolgono i criteri di congruenza dei triangoli. Sempre tenendo presente la fascia d'età degli alunni cui mi sono rivolta, ho ritenuto conveniente non esplicitarli ma dichiarare semplicemente che due *triangoli* sono *congruenti* se esistono pieghe che sovrappongano contemporaneamente tutti i loro punti.

22. Quadrilateri

Su un foglio si eseguano, riaprendolo ogni volta, le pieghe (1), (2), (3) e (4). Se siamo fortunati, (ricordiamo i paragrafi 4 e 7), vedremo nel foglio i 6 punti che derivano dall'intersezione a due a due delle rette disegnate. Il piano è stato ripartito in 11 regioni, di cui 3 sono angoli, 5 sono regioni illimitate e 3 sono regioni limitate; di queste ultime, 2 sono triangoli mentre la restante è una figura nuova che chiamiamo *quadrilatero*.

Naturalmente, le regioni potrebbero essere meno di 11, ad es. se due rette fossero tra loro parallele. Cosa perdiamo in tal caso? E cos'altro ci potrebbe capitare?

23. Nota

Nel paragrafo 22, come pure nei paragrafi 5 e 11, le parti in cui si considera diviso il piano sono esattamente corrispondenti ai pezzi di carta che deriverebbero dall'usar le forbici in corrispondenza delle pieghe. In questo modo si rinuncia (temporaneamente!) agli angoli concavi e anche ad altro.

24. Quadrilateri "speciali"

Si riprenda il quadrilatero del paragrafo 22: probabilmente non ci vedremo niente di speciale. Tuttavia, potremmo fare in modo che due o più lati siano congruenti, o che lo siano degli angoli, ecc.

La classificazione dei quadrilateri può basarsi su diverse scelte dell'insieme dei criteri: non poniamoci qui il problema e limiamoci a dare il nome a figure che, possedendo abbastanza aspetti interessanti, se ne meritano uno.

25. Rettangoli: definizione e una possibile costruzione

Riprendiamo il foglio di 7.a e continuiamo aggiungendo (4) perpendicolare a (2): automaticamente, sarà perpendicolare a …. (chi? e perché?)

Si vengono a perdere alcune delle regioni in cui resta diviso il piano, ma si individua comunque un quadrilatero che, avendo tutti gli angoli retti, è un *quadrilatero equiangolo*, a cui daremo il nome di *rettangolo*.

26. Problemi sui rettangoli

26.a **Mediane**

Troviamo i punti medi di due *lati opposti* (=senza estremi comuni) e congiungiamoli con una piega: abbiamo così disegnato un *asse* comune a due lati ed il segmento di esso che ha estremi sui lati in questione si dice *mediana* del rettangolo.
Due lati opposti di un rettangolo sono congruenti? Perché, nella nostra geometria?

26.b Diagonali

Nel rettangolo ottenuto nel paragrafo 25; congiungiamo con una piega due *vertici opposti* (=non estremi di uno stesso lato): il segmento che ha tali vertici come estremi si chiama *diagonale*.
Le diagonali di un rettangolo sono congruenti e si dimezzano: come lo si può "mostrare"?

26.b1 Problemi di approfondimento

Se le diagonali si dimezzano e sono congruenti, avremo sempre un rettangolo?

27. Nota

Le mediane dividono il rettangolo in quattro parti congruenti per sovrapposizione. Vediamo che anche le diagonali dividono il rettangolo in parti congruenti, ma come?

28. Quadrati

Riprendiamo il foglio del paragrafo 25 e consideriamo due lati consecutivi del rettangolo: sono congruenti? come potremmo verificarlo? (si rivedano i paragrafi 13 e da 14.a a 14.b4).
Un rettangolo in cui due lati consecutivi siano congruenti si chiama *quadrato*.

28.a Una costruzione per il quadrato

Segniamo le pieghe (1) e (2) tra loro perpendicolari ed indichiamo con (3) la loro intersezione. Scegliamo un punto (4) su (1); col nostro "compasso", troviamo il punto (5) su (2) in modo che il segmento di estremi (3) e (4) sia congruente al segmento di estremi (3) e (5), similmente a come abbiamo fatto durante la costruzione del triangolo equilatero nel paragrafo 20.a. Segniamo ora la piega (6), perpendicolare ad (1) e passante per (4) e la piega (7), perpendicolare a (2) e passante per (5). Indichiamo con (8) l'intersezione di (6) con (7): il quadrilatero di vertici (3), (4), (8) e (5) è un quadrato.

28.a1 Problemi di approfondimento

La costruzione garantisce la congruenza di due lati consecutivi: e gli altri 2?

29. Deltoidi

Abbiamo visto che i rettangoli hanno i lati opposti congruenti; se invece in un quadrilatero si individuano coppie di lati consecutivi congruenti, lo chiamiamo *deltoide*.

29.a Costruzione di un deltoide

Siano (1) e (2) gli estremi di un segmento e (3) l'asse di tale segmento. Un qualunque punto di (3) individua con (1) e con (2) segmenti consecutivi congruenti: allora, scelti i punti (4) e (5) su (3), il quadrilatero di vertici (1), (4), (2)e (5) è un deltoide.

29.b Nota

Il punto (5) può essere esterno al triangolo di vertici (1), (4), (2) ed allora tutti gli angoli del quadrilatero sono minori di un angolo piatto, cioè sono *angoli convessi* e anche si dirà del quadrilatero ottenuto che è un *deltoide convesso.* Se invece il punto (5) è interno al triangolo di vertici (1), (4), (2), uno dei suoi angoli è maggiore di un angolo piatto, cioè è un *angolo concavo* e anche si dirà del quadrilatero ottenuto che è un *deltoide concavo.*
Esistono rettangoli concavi?

30. Rombi

Un deltoide potrebbe avere più di due coppie di lati consecutivi congruenti, anzi se ne trovassimo tre, automaticamente anche la quarta coppia di lati consecutivi sarebbe formata da segmenti congruenti: diremo che si ottiene un *quadrilatero equilatero* cui diamo il nome di *rombo*.

30.a Costruzione di un rombo

Siano (1) e (2) due pieghe perpendicolari. Si pieghi sia lungo (1) che lungo (2) tenendo visibili le tracce in colore. Segnare il punto (3) su (1) ed il punto (4) su (2); senza riaprire il foglio, si faccia la piega che passa per (3) e per (4).
Il quadrilatero che ha per lati i segmenti individuati dall'ultima piega è un rombo.

30.a1 Problemi di approfondimento

Riguardiamo le diagonali di tutti i quadrilateri fin qui costruiti: cosa possiamo dire? E delle mediane?
Nei rettangoli e nei quadrati i lati opposti sono paralleli; perché? E nei deltoidi? E nei rombi?

31. Ancora i quadrati

Nel paragrafo 28.a1 abbiamo visto che il quadrato ha tutti i lati congruenti, cioè è un quadrilatero equilatero dunque è un rombo. Ma nel paragrafo 28 i quadrati sono definiti come particolari rettangoli e quindi con diagonali congruenti. Allora è possibile un'altra costruzione del quadrato.

31.a Costruzione di un quadrato come rombo speciale

Siano (1) e (2) due pieghe perpendicolari ed indichiamo con (3) la loro intersezione. Si pieghi sia lungo (1) che lungo (2) tenendo visibili le tracce in colore. Segnare il punto (4) su (1); col nostro "compasso", troviamo il punto (5) su (2) in modo che il segmento di estremi (3) e (4) sia congruente al segmento di estremi (3) e (5), similmente a come abbiamo fatto durante la costruzione del triangolo equilatero nel paragrafo 20.a. Senza riaprire il foglio, si faccia la piega che passa per (4) e per (5). Il quadrilatero che ha per lati i segmenti individuati dall'ultima piega è un quadrato.

31.a1 Problemi di approfondimento

Perché siamo certi che il "rombo speciale" appena costruito è contemporaneamente un "rettangolo speciale"? Ossia, perchè è legittimo che i "rombi speciali" ed i "rettangoli speciali" abbiano lo stesso nome?

31.a2 Pausa di riflessione

Si confronti il quadrato appena ottenuto con quello del paragrafo 28: cosa possiamo osservare?

32. Trapezi

Le costruzioni fin qui esposte sui quadrilateri partivano dalla perpendicolarità di lati o di diagonali, ma potremmo considerare che invece vi sia parallelismo tra lati (ha senso il parallelismo tra diagonali?). Se in un quadrilatero c'è una coppia di lati paralleli, diremo che è un *trapezio*.

32.a Una costruzione del trapezio

Si costruiscano le pieghe (1) e (3) tra loro parallele in quanto entrambi perpendicolari ad una piega (2), come detto nel paragrafo 7.a. Si riapra il foglio e si tracci la piega (4) che interseca sia (1) che (3); si riapra nuovamente il foglio e si tracci la piega (5) che interseca sia (1) che (3). Il quadrilatero che si individua trascurando la piega (2) è un trapezio.

32.b Un'altra costruzione del trapezio

Si ripeta la costruzione del paragrafo 11.b fino ad ottenere la piega (5). Si tracci la piega (6) perpendicolare a (5) e quindi parallela a (3): il quadrilatero individuato dalle rette (1), (2), (3) e (6) è un trapezio.

33. Trapezi "speciali"

Un trapezio potrebbe avere un angolo retto (*trapezio rettangolo*) oppure due lati congruenti *(trapezio isoscele).*

33.a Costruzione di un trapezio rettangolo

Riguardiamo la costruzione del paragrafo 32.a: anche il quadrilatero che ha per lati le rette (1), (2),

(3) e (4) ha due lati paralleli e dunque è un trapezio. Ma (2) è perpendicolare a (1) ed a (3), dunque il trapezio è rettangolo.

33.a1Problemi di approfondimento

Un trapezio potrebbe avere un solo angolo retto? Potrebbe averne più di due?
I rettangoli sono trapezi? Ed i quadrati? Ed i rombi?

33.b Costruzione di un trapezio isoscele

Riguardiamo la costruzione del paragrafo 32.b. Se si parte da un triangolo isoscele, il trapezio che si ottiene ha due lati congruenti (perché?) e quindi è un trapezio isoscele.

33.a1Problemi di approfondimento

Un trapezio potrebbe avere più di due lati congruenti? E più di una coppia di lati congruenti?
I rettangoli sono trapezi? Ed i quadrati? Ed i rombi?

34. Parallelogrammi

Se un quadrilatero ha due coppie di lati paralleli, si chiama *parallelogramma.*

34.a Costruzione di un parallelogramma

Si segni la piega (1) e due sue perpendicolari (2) e (3); si segni la piega (4) e due sue perpendicolari (5) e (6). Indicando con (7) e (8) le intersezioni di (2) con (5) e (6) e con (9) e (10) le intersezioni di (3) con (5) e (6), abbiamo i vertici di un parallelogramma.

34.b Nota

Le proprietà dei parallelogrammi si possono "mostrare" piegando carta, ma alcune (ad es. una diagonale divide un parallelogramma in due triangoli congruenti) richiedono il laboratorio *Geometria con piegature della carta: isometrie del piano, a partire da simmetrie assiali*.
In questo momento interessa "mostrare" che le diagonali si dimezzano a vicenda, rimandando a più tardi la dimostrazione del viceversa: se le diagonali si dimezzano allora è un parallelogramma. Questa proprietà viene sfruttata nella prossima costruzione.

34.c Un'altra costruzione di un parallelogramma

Si segnino le pieghe incidenti (1) e (2) e sia (3) la loro intersezione. Seguendo il paragrafo 14.a, troviamo i punti (4) e (5) su (1) equidistanti da (3) e i punti (6) e (7) su (2), anch'essi equidistanti da (3). Il quadrilatero che ha (4), (5), (6) e (7) per vertici è un parallelogramma.

35. Di nuovo i rombi

La costruzione del paragrafo 30.a, basata sul fatto che una diagonale lo divide in triangoli isosceli, confrontata con quella del paragrafo 34.c, implica che, dimezzandosi le diagonali il rombo viene ad essere un "parallelogramma speciale", essendo equilatero. Allora, si potrebbe costruire un parallelogramma secondo la procedura del paragrafo 34.a ma aggiungendo le pieghe necessarie a garantire la congruenza dei lati. Lascio al lettore particolarmente diligente il gusto di cimentarsi con tale costruzione che, in cambio della sua complessità, non aggiunge didatticamente nulla più di quanto si ha con la sola formulazione del problema.

36. Ancora i rettangoli

Che i rettangoli siano parallelogrammi (anch'essi speciali!) deriva direttamente dall'essere equiangoli. Dunque si può adattare facilmente, questa volta con vantaggio didattico, la costruzione del paragrafo 34.c, assicurandoci che le diagonali, oltre a dimezzarsi, siano anche congruenti.

37. E ancora rettangoli, e quadrati ...

Approfondendo la parte relativa alle proprietà dei parallelogrammi, si ottengono ulteriori costruzioni sia per il rettangolo che per il quadrato, basate sulle posizioni delle mediane.
Suggerisco inoltre ulteriori approfondimenti sui quadrilateri, quali i seguenti:

- Come sono le mediane di un quadrilatero qualunque, di un trapezio isoscele, di un rettangolo, di un rombo, ...?

- Che figura si ottiene congiungendo i punti medi di un trapezio isoscele? E se fosse un altro tipo di quadrilatero? (Esaminateli tutti, compresi quelli concavi!)
- Come sono le bisettrici di un quadrilatero qualunque, di un trapezio isoscele, di un rettangolo, di un rombo, ...? E gli assi dei lati?
- Ogni quadrilatero è dotato di incentro? E di circocentro?
- Ogni quadrilatero è dotato di baricentro? È sempre interno alla figura? Si trova ancora come intersezione delle mediane? (Lo stato attuale delle "conoscenze geometriche fin qui costruite" non ci consente di dare risposta all'ultima domanda.)

38. Poligoni con più di quattro lati

In generale, si può ottenere un poligono con più di 4 lati aggiungendo rette nel nostro piano, similmente a quanto fatto nei paragrafi 11 e 22. tuttavia solo i poligoni regolari hanno qualche interesse. Tra essi cito innanzitutto l'esagono regolare e l'ottagono regolare, perché possono apparire, indesiderati, se nella costruzione del triangolo equilatero o, rispettivamente, del quadrato, non si riapre il foglio tutte le volte che è necessario.
Cito inoltre la costruzione del pentagono regolare, anche se esula dagli schemi, sia dell'origami che della geometria con piegature della carta, perché stupisce sempre i ragazzi.

38.a Costruzione del pentagono regolare

Ci si procuri una *striscia* (= parte di piano compresa tra due rette parallele), il che si può ottenere con la costruzione del paragrafo 7.a o, più facilmente, con un pezzo di nastro. Se si ricorre alla costruzione, bisogna tagliare il foglio lungo le due rette parallele, ma NON con le forbici.
Con la striscia formare un nodo allentato, che va stretto lentamente e facendo in modo che risulti piatto senza che la carta raggrinzisca.
Se il nastro è abbastanza lungo, si possono fare cinque nodi "adiacenti", che formano un pentagono ancora regolare e di lato doppio del precedente.

39. Per i più ambiziosi

Qualunque costruzione con riga e compasso si può realizzare con piegature della carta: le indicazioni date sono sufficienti a ottenerle.
In generale, non ci si propone di costruire curve, alcune delle quali si possono ottenere come *inviluppo*, ossia tracciando pieghe ad esse tangenti. La più semplice riguarda la parabola.

39.a Costruzione dell'inviluppo di una parabola

Si consiglia di partire con un foglio rettangolare e di strapparne solo tre margini, lasciando intatto uno dei lati maggiori del rettangolo iniziale. Sul foglio così preparato, indichiamo con (1) il margine rettilineo e con (2) un punto scelto a circa 2 cm da esso; si consiglia di porlo a una distanza circa tripla da uno dei margini "frastagliati" e di segnarlo il più possibile puntiforme.
Si eseguano quante più pieghe possibili che portino (1) a sovrapporsi a (2) ed ogni volta se ne passi la traccia col pennarello.

APPENDICE

Sugli "assiomi della geometria con la carta"

In Bascetta, 1998 si dice degli assiomi di Euclide quanto e come conviene rispetto all'articolo; inoltre gli "assiomi della geometria con la carta" sono davvero troppo pochi! La fonte è stata citata per la facilità di consultazione e va presa come segnalazione del grado di interesse sulle connessioni dell'origami con la geometria euclidea e non come base di studio.

In ogni caso, stiamo lavorando con modelli concreti di enti geometrici, dunque possiamo "mostrare" delle situazioni geometriche ma non dobbiamo pensare che ciò equivalga a "dimostrare" un teorema. Del resto, nella geometria tradizionale, non si sostituisce una costruzione con riga e compasso al processo dimostrativo …

Ho cercato il più possibile di mantenermi rigorosa per rispetto degli utenti adulti, ma mi sono presa molte libertà, soprattutto non dichiarando esplicitamente tutti gli assiomi di cui di volta in volta avevo bisogno.
Se ben definito, tale sistema di assiomi è equivalente a quello di Euclide, ma considerando la fascia di età dei ragazzi potenziali utenti, ho preferito privilegiare l'impatto comunicativo e la possibilità di perseguire forti obiettivi trasversali piuttosto che tener d'occhio il rigore matematico.

Traccia del percorso didattico
La “mia” geometria della carta piegata era inserita in un percorso distribuito sull'intero triennio di scuola secondaria di primo grado (11-14 anni) che prevedeva, escludendo qui tutti gli aspetti metrici, la seguente scaletta:

a) **Fine della classe prima o (più frequentemente) compiti per le vacanze**

Le prime esperienze sulle isometrie seguivano il libro di testo in adozione [cfr. Rinaldi Carini R.,, 1979], che a questo livello le tratta similmente a molti altri, compresi quelli per la scuola primaria. Il testo propone un insieme di situazioni, sia nella parte teorica che in quella degli esercizi, in cui una figura geometrica è sottoposta ad una simmetria assiale, una rotazione, una traslazione. Non vi si parla della possibilità di comporle, ciò che vien fatto, parzialmente, sul volume per la classe terza.

b) **Primo quadrimestre della classe seconda: settembre**

A partire dal controllo dei compiti per le vacanze o riprendendo la chiusura dell'anno precedente, iniziavo con le attività proposte nel laboratorio *Geometria con piegature della carta: isometrie del piano, a partire da simmetrie assiali*, alle quali premettevo i paragrafi iniziali di questo testo, fino al 6.a, e il paragrafo 9.

c) **Primo quadrimestre della classe seconda: ottobre**

Lo studio dei triangoli e dei quadrilateri veniva sviluppato inizialmente col supporto di cannucce da bibita, molto similmente a quanto successivamente adattato per la scuola primaria [cfr. Onofrio E., Rocco M., 2009].
A questo punto sorge il problema della registrazione di situazioni che si possono presentare nei modelli con cannucce, la cui rappresentazione su carta può essere troppo approssimativa. Approfittavo del fatto che, di solito, l'insegnante di Educazione Tecnica aveva già fatto lavorare i ragazzi su alcune costruzioni geometriche con riga e compasso: il passaggio dalla dinamicità dei modelli con cannucce alla registrazione su carta delle diverse situazioni era rappresentato da discussioni critiche sulle proposte del libro di testo di Educazione Tecnica; sono ovvie le necessità relazionali che obbligano a riferirsi al testo e non all'insegnante.

d) **Primo quadrimestre della classe seconda: ottobre-dicembre**

Nell'ambito del progetto informatica d'Istituto, avviavo i ragazzi all'uso di un software di geometria dinamica. Spesso ho affrontato questo lavoro da sola, con classi da 20 a 25 alunni distribuiti su una dozzina di PC; qualche volta sono stata affiancata da docenti di Educazione Tecnica ma l'abbinamento più soddisfacente si è realizzato l'anno in cui la partner era l'insegnante di religione: per dire che un buon supporter può mancare di competenze disciplinari e perfino (come era nel caso specifico) di competenze tecnologiche.
Una prima fase era dedicata allo studio del software in sé (per le tracce metodologiche e degli itinerari didattici seguiti, cfr. Rocco 1995) e includeva la produzione di alcune costruzioni geometriche di base senza il ricorso ad eventuali “scorciatoie” offerte dal menu del software in uso.

e) **Primo quadrimestre della classe seconda: novembre**

lo studio dei triangoli e dei quadrilateri si ripeteva, approfondendo quanto visto con le cannucce, seguendo un percorso praticamente identico a quello proposto con questo laboratorio. In questa fase, i ragazzi venivano spronati a giustificare le proprie osservazioni ed anche le costruzioni stesse.

f) **Secondo quadrimestre della classe seconda o classe terza.**

Le costruzioni realizzate con le cannucce venivano “tradotte” dai ragazzi in Cabri, sempre nell'ambito del progetto di informatica e, spesso, con l'obiettivo di servirsene in un'edizione di La Matematica dei Ragazzi. Altre volte, sempre in vista della manifestazione citata, i ragazzi hanno realizzato in terza costruzioni anche molto più complesse, come la rappresentazione assonometrica e dinamica delle sezioni piane di un cubo [cfr. ROCCO 2002].

BIBLIOGRAFIA

ONOFRIO E., ROCCO M.,
2009, *Alla scoperta dei quadrilateri. Un percorso di geometria attraverso l'esperienza manipolativa*, in LA MATEMATICA DEI RAGAZZI, SCAMBI DI ESPERIENZE TRA COETANEI, antologia dell'ed. 2008, a cura di Zuccheri, Gallopin, Rocco, Zudini, Trieste, Università di Trieste.

RINALDI CARINI R.,
1979, *Matematica, vol.1*, Bologna, Zanichelli

ROCCO M.,
2002, *Dal piano allo spazio*, in LA MATEMATICA DEI RAGAZZI, SCAMBI DI ESPERIENZE TRA COETANEI, antologia delle ed. 1996-98, a cura di Zuccheri, Leder, Scheriani, Trieste, Università di Trieste.
1995;*Esperienze con CABRI nella Scuola Media inferiore*, Quaderno didattico n.25 del Dip. di Scienze Matem, Trieste., Univ.di Trieste,

WEBGRAFIA

BASCETTA P.,
1998, *Origami: Geometria con la carta*, http://www.origami-cdo.it/articoli/artgeo.htm

SITI WEB

Centro Diffusione Origami *www.**origami**-cdo.it*