CAPITOLO 10
ESPONENZIALI

PROVA DI VERIFICA – ESERCIZI FISICA

1 La velocità v in metri al secondo di un corpo in caduta libera, inizialmente in quiete, in presenza di attrito varia secondo una legge del tipo

$$v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}),$$

con k costante positiva e $t = 0$ s l'istante in cui il corpo comincia a cadere.

a. Determina k, specificandone la dimensione fisica, sapendo che per t sufficientemente grande v si avvicina arbitrariamente al valore di 126 km/h senza superarlo.

b. Rappresenta graficamente la funzione $v(t)$ per il valore di k determinato.

c. Quale velocità raggiunge il corpo dopo un tempo di caduta pari a quello che il corpo avrebbe impiegato a cadere da un'altezza di 19,6 m in assenza di attriti? Quanto tempo avrebbe impiegato a raggiungere questa velocità in assenza di attriti?

Svolgimento

a. Osserviamo che la funzione $v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$ è ottenuta a partire dalla funzione $y = e^{-kt}$ effettuando le seguenti trasformazioni: una simmetria assiale rispetto all'asse x, una traslazione di vettore $\vec{v}(0; 1)$ e una dilatazione verticale di fattore $\frac{g}{k}$.

Queste trasformazioni trasformano l'asintoto orizzontale $y = 0$ nell'asintoto $y = \frac{g}{k}$; questo asintoto rappresenta il valore a cui $v(t)$ tende per valori di t arbitrariamente grandi. Inoltre, l'unità di misura di k, in base all'analisi dimensionale, deve essere s^{-1}. Per calcolare il valore di k usiamo le informazioni sul comportamento della velocità per t che tende all'infinito.

Trasformiamo il valore della velocità da km/h in m/s:

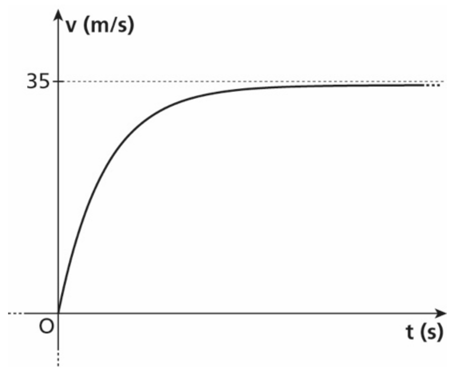
$$\frac{126}{3{,}6} = 35 \text{ m/s}.$$

Imponiamo la condizione sull'asintoto:

$$\frac{g}{k} = 35 \to k = \frac{g}{35} \to k = \frac{9{,}8}{35} \to k = 0{,}28 \text{ s}^{-1}.$$

b. Usiamo le trasformazioni geometriche per rappresentare la funzione:

$$v(t) = 35(1 - e^{-0{,}28t}), \quad \text{con } t \geq 0.$$



c. Cadendo da fermo senza attrito da un'altezza di 19,6 m il corpo avrebbe impiegato un tempo pari a

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \to t = \sqrt{\frac{2 \cdot 19{,}6}{9{,}8}} \to t \simeq 2{,}0 \text{ s.}$$

Dopo 2,0 s, in presenza di attrito, il corpo raggiunge una velocità pari a

$$v(2{,}0) = 35(1 - e^{-0{,}28 \cdot 2{,}0}) \to v(2{,}0) \simeq 15 \text{ m/s.}$$

In assenza di attriti, questa velocità sarebbe stata raggiunta dopo

$$t = \frac{v}{g} \to t = \frac{15}{9{,}8} \to t \simeq 1{,}5 \text{ s.}$$

2 Due forze $\overrightarrow{F_1}$ e $\overrightarrow{F_2}$, parallele e concordi, agiscono su due corpi di massa uguale inizialmente in quiete, a partire da uno stesso istante $t = 0$ s. I moduli, in newton, delle due forze diminuiscono nel tempo secondo le leggi:

$F_1(t) = A_1 \cdot 2^{-k_1 t}$ e $F_2(t) = A_2 \cdot 2^{-k_2 t}$,

con A_1, A_2, k_1, k_2 costanti positive.

a. Sapendo che

$$F_2(0) = 2F_1(0), \quad F_1(3) = F_2(3) = \frac{1}{2}F_1(0), \quad F_1(9) = 1,$$

trova le quattro costanti. Specificane la dimensione fisica.

b. Rappresenta in uno stesso sistema di riferimento, per $t \geq 0$, le funzioni $F_1(t)$ e $F_2(t)$.

c. Approssimando gli archi dei grafici di $F_1(t)$ e $F_2(t)$ per $t \in [0; 3]$, con le relative corde, dai una stima degli impulsi ricevuti dai due corpi nei primi 3 secondi. Ricava il rapporto $\frac{v_1}{v_2}$ tra le velocità raggiunte dai due corpi in questo intervallo di tempo, in assenza di attriti.

Svolgimento

a. Dall'analisi dimensionale, ricaviamo che A_1 e A_2 devono essere in newton, mentre k_1 e k_2 devono essere in s^{-1}.
Dalla prima condizione si ricava $A_2 = 2A_1$. Dalla seconda condizione possiamo dedurre:

$$A_1 \cdot 2^{-3k_1} = 2A_1 \cdot 2^{-3k_2} \rightarrow 2^{-3k_1} = 2^{1-3k_2} \rightarrow -3k_1 = 1 - 3k_2 \rightarrow k_1 = k_2 - \frac{1}{3};$$

$$F_1(3) = \frac{1}{2}F_1(0) \rightarrow A_1 \cdot 2^{-3k_1} = \frac{1}{2}A_1 \rightarrow -3k_1 = -1 \rightarrow$$

$$k_1 = \frac{1}{3} \simeq 3{,}0 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}, k_2 = \frac{2}{3} \simeq 6{,}7 \cdot 10^{-1}\ \mathrm{s}^{-1}.$$

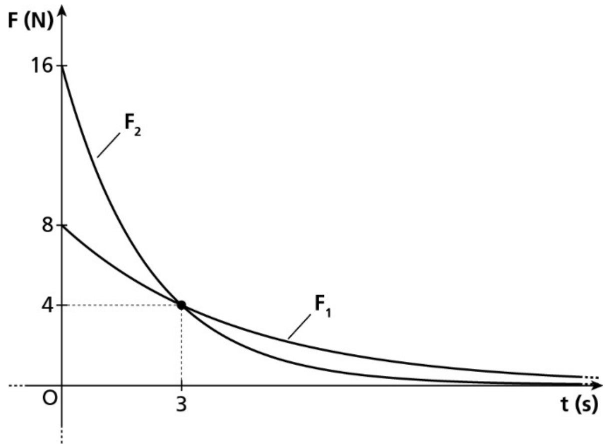
Dalla terza condizione ricaviamo:

$$F_1(9) = A_1 \cdot 2^{-\frac{1}{3} \cdot 9} = 1 \rightarrow A_1 = 8.$$

Quindi, $A_1 = 8$ N e $A_2 = 16$ N.

b. Rappresentiamo nello stesso riferimento cartesiano, con $t \geq 0$, le funzioni

$$F_1(t) = 8 \cdot 2^{-\frac{1}{3}t} \quad \text{e} \quad F_2(t) = 16 \cdot 2^{-\frac{2}{3}t}.$$



c. Approssimando gli archi dei grafici di $F_1(t)$ e $F_2(t)$ con le relative corde, le aree nell'intervallo [0; 3] sono approssimate da trapezi rettangoli.
Possiamo stimarne le estensioni, che corrispondono agli impulsi Δq (in kg·m/s) cercati:

$$\Delta q_1 = \frac{(8+4)\cdot 3}{2} = 18 \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

$$\Delta q_2 = \frac{(16+4)\cdot 3}{2} = 30 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Poiché le masse dei due corpi sono uguali e non sono presenti altre forze o attriti, dopo 3 secondi le velocità raggiunte dai due corpi hanno il seguente rapporto:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{q_1}{m}}{\frac{q_2}{m}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$