

Geometria 2

Anno accademico 2023-2024

Foglio di esercizi n.5

10 aprile 2024

- 1) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n , e sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base di V . Dimostrare che esiste un unico prodotto scalare su V che rende \mathcal{E} una base ortonormale.
- 2) In \mathbb{E}^2 si determini la distanza tra il punto $Q = (1, -2)$ e la retta r di equazione $r: 2x - y = 1$. Determinare il punto $A \in r$ a distanza minima da Q .
- 3) Nello spazio Euclideo \mathbb{E}^3 si determini la distanza tra il punto $P = (1, -1, 2)$ e la retta r di equazione

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + z = 0. \end{cases}$$

Si determini il punto $A \in r$ a distanza minima da P .

- 4) Calcolare l'angolo, la distanza e il segmento di minima distanza tra le due rette r e s di \mathbb{E}^3 , dove

$$r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x + y = 1 \\ y + z = -2. \end{cases}$$

- 5) Si considerino i punti $A = (2, -1)$ e $Q = (1, 1)$ di \mathbb{E}^2 . Determinare la retta del fascio proprio di centro Q a massima distanza da A .
- 6) Determinare la distanza e i punti di minima distanza tra le rette

$$r: \begin{cases} x - y + z = -1 \\ z - 2y = 1 \end{cases} \quad s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + z = 2. \end{cases}$$

- 7) Si consideri il piano in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^4$ di equazioni cartesiane

$$L: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 2 \\ 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Determinare le equazioni cartesiane del piano H ortogonale a L e passante per il punto $Q = (1, 1, 0, 2)$. Si calcoli la distanza tra Q e L .

- 8) Si consideri il piano $\pi: x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1$ in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^3$. Determinare le equazioni cartesiane dei due piani a distanza 1 da π .
- 9) Sia $r: y = mx + q$ una retta in $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$, e sia $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ l'angolo acuto che r forma con l'asse x . Dimostrare che $\tan \theta = |m|$.
- 10) Dire se la forma sesquilineare Hermitiana su \mathbb{C}^2 rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 5 \end{pmatrix}$$

è definita positiva.